

Septiembre de 2011 · Convocatoria extraordinaria

En el examen se elige una opción, A o B. Aquí resolvemos las dos. En cada ejercicio primero aclaramos qué se busca, escribimos la propiedad que vamos a usar y después sustituimos los datos paso a paso.

Opción A

Problema A.1 · Operaciones con matrices

La matriz y la identidad son

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M^2 = M.$$

a) ¿Para qué valores de k tiene inversa $B = A - kI$?

Una matriz cuadrada tiene inversa exactamente cuando su determinante no es cero. Primero restamos kI a A :

$$B = \begin{pmatrix} -k & -2 \\ 1 & 3-k \end{pmatrix}.$$

Para una matriz 2×2 , $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \det B &= (-k)(3-k) - (-2)(1) \\ &= -3k + k^2 + 2 \\ &= k^2 - 3k + 2 = (k-1)(k-2). \end{aligned}$$

El determinante se anula cuando $k = 1$ o $k = 2$. Así que B tiene inversa para todos los reales salvo esos dos valores:

$$k \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}.$$

b) Calcula B^{-1} cuando $k = 3$.

Al sustituir $k = 3$,

$$B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \det B = (-3)(0) - (-2)(1) = 2.$$

Usamos la fórmula de la inversa de una matriz de orden 2:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Sustituimos los cuatro elementos de B :

$$B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

El determinante vale $2 \neq 0$, de modo que la inversa existe.

c) Halla α y β si $\alpha A^2 + \beta A = -2I$.

Primero calculamos la potencia pedida, multiplicando filas por columnas:

$$A^2 = A A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 & 0 \cdot (-2) + (-2) \cdot 3 \\ 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

La combinación lineal de matrices se hace por separado:

$$\alpha A^2 = \begin{pmatrix} -2\alpha & -6\alpha \\ 3\alpha & 7\alpha \end{pmatrix}, \beta A = \begin{pmatrix} 0 & -2\beta \\ \beta & 3\beta \end{pmatrix}.$$

Al sumarlas e igualar las cuatro entradas con las de $-2I$, obtenemos

$$\begin{pmatrix} -2\alpha & -6\alpha - 2\beta \\ 3\alpha + \beta & 7\alpha + 3\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

La entrada superior izquierda da $-2\alpha = -2$, luego $\alpha = 1$. La entrada superior derecha da

$$-6(1) - 2\beta = 0 \implies -2\beta = 6 \implies \beta = -3.$$

Comprobamos las otras entradas: $3(1) + (-3) = 0$ y $7(1) + 3(-3) = -2$. Las cuatro coinciden; por tanto,

$$\boxed{\alpha = 1, \beta = -3.}$$

d) Comprueba que $P = I - M$ cumple $P^2 = P$ y $MP = PM$.

Usamos el dato $M^2 = M$ y que I es la identidad: $IM = MI = M$. Desarrollamos el cuadrado sin cambiar el orden de los factores:

$$\begin{aligned} P^2 &= (I - M)(I - M) \\ &= I^2 - IM - MI + M^2 \\ &= I - M - M + M \\ &= I - M = P. \end{aligned}$$

Para la segunda igualdad calculamos los dos productos por separado:

$$\begin{aligned} MP &= M(I - M) = MI - M^2 = M - M = 0, \\ PM &= (I - M)M = IM - M^2 = M - M = 0. \end{aligned}$$

Así, ambos productos son la matriz cero y en particular $\boxed{MP = PM}$; además, $\boxed{P^2 = P}$.

Problema A.2 · Rectas y planos en el espacio

Las rectas del enunciado son

$$r : \begin{cases} x = 3 + \lambda, \\ y = -1 + 2\lambda, \\ z = 2 + \lambda, \end{cases} s : \begin{cases} x + 2y - 1 = 0, \\ 3y - z + 2 + \alpha = 0. \end{cases}$$

Usaremos las rectas en forma paramétrica. En r se leen el punto $P_r = (3, -1, 2)$ y el vector director $\vec{d}_r = (1, 2, 1)$. Para pasar s a forma paramétrica, elegimos $y = t$ y despejamos las otras coordenadas:

$$x = 1 - 2t, \quad z = 3t + 2 + \alpha.$$

Por tanto,

$$s : \begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = t, \\ z = 2 + \alpha + 3t, \end{cases} \quad \vec{d}_s = (-2, 1, 3).$$

a) ¿Qué valor de α hace que las dos rectas estén en un mismo plano?

Dos rectas con direcciones no proporcionales son coplanarias si y solo si el producto mixto de sus dos vectores directores y el vector que une un punto de una con un punto de la otra es cero. Primero comprobamos que las direcciones no son proporcionales y calculamos su producto vectorial:

$$\vec{d}_r \times \vec{d}_s = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (5, -5, 5) \neq (0, 0, 0).$$

Así que las rectas no son paralelas. Tomamos en s el punto $P_s = (1, 0, 2 + \alpha)$. Entonces

$$\overrightarrow{P_r P_s} = P_s - P_r = (-2, 1, \alpha).$$

La condición de coplanaridad queda

$$\begin{aligned}(\vec{d}_r \times \vec{d}_s) \cdot \overrightarrow{P_r P_s} &= 0, \\ (5, -5, 5) \cdot (-2, 1, \alpha) &= 5(-2) - 5(1) + 5\alpha = 0.\end{aligned}$$

De aquí, $-10 - 5 + 5\alpha = 0$, luego $5\alpha = 15$ y

$$\boxed{\alpha = 3}.$$

b) Plano que contiene a ambas rectas

Con $\alpha = 3$, el punto de s elegido es $P_s = (1, 0, 5)$. Un vector normal al plano se obtiene con el producto vectorial ya calculado; podemos simplificar $(5, -5, 5)$ y usar $\vec{n} = (1, -1, 1)$. La ecuación general de un plano de normal (a, b, c) que pasa por (x_0, y_0, z_0) es

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Sustituimos el normal y el punto $P_r = (3, -1, 2)$:

$$(x - 3) - (y + 1) + (z - 2) = 0 \implies \boxed{x - y + z - 6 = 0}.$$

Comprobación: $\vec{n} \cdot \vec{d}_r = 1 - 2 + 1 = 0$ y $\vec{n} \cdot \vec{d}_s = -2 - 1 + 3 = 0$. Además, el plano contiene los puntos base de ambas rectas: $3 - (-1) + 2 - 6 = 0$ para P_r , y $1 - 0 + 5 - 6 = 0$ para P_s . Así, las dos rectas quedan contenidas en el plano.

c) Plano perpendicular a r por $(1, 2, 1)$

Si un plano es perpendicular a una recta, el vector director de la recta es normal al plano. Por ello tomamos $\vec{n} = \vec{d}_r = (1, 2, 1)$. Sustituimos el punto dado en la forma general:

$$1(x - 1) + 2(y - 2) + 1(z - 1) = 0 \implies \boxed{x + 2y + z - 6 = 0}.$$

Al sustituir $(1, 2, 1)$, el lado izquierdo vale $1 + 4 + 1 - 6 = 0$, como se requiere.

Problema A.3 · Estudio de $f(x) = x^2 e^{-x}$

a) Dominio y recorrido.

La función es el producto de un polinomio y una exponencial. Ambos están definidos para cualquier número real; por eso

$$\boxed{\text{Dom}(f) = \mathbb{R}}.$$

Además, $x^2 \geq 0$ y $e^{-x} > 0$ para todo real x . Luego $f(x) \geq 0$, y $f(0) = 0$. Cuando $x \rightarrow -\infty$, tanto x^2 como e^{-x} crecen sin límite, de modo que $f(x) \rightarrow +\infty$. Como f es continua y decrece desde valores arbitrariamente grandes hasta 0 en $(-\infty, 0]$, toma todos los valores no negativos y ninguno negativo:

$$\boxed{\text{Im}(f) = [0, +\infty)}.$$

b) Máximo y mínimo relativos; c) crecimiento y decrecimiento.

Aplicamos la regla del producto, $(uv)' = u'v + uv'$, con $u = x^2$, $v = e^{-x}$, $u' = 2x$ y $v' = -e^{-x}$:

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = xe^{-x}(2 - x).$$

Como e^{-x} nunca vale cero, los puntos críticos se obtienen de

$$f'(x) = 0 \iff x(2 - x) = 0 \iff x = 0 \text{ o } x = 2.$$

El dominio no tiene agujeros. Comprobamos el signo en cada intervalo usando un valor de prueba a la izquierda, entre los críticos y a la derecha:

Intervalo o punto	Sustitución en $x(2-x)$	Signo de $f'(x)$	Conclusión
$(-\infty, 0)$	$x = -1 : (-1)(3) = -3$	-	Decrece
$x = 0$	$f'(0) = 0$, cambia de - a +		Mínimo relativo
$(0, 2)$	$x = 1 : (1)(1) = 1$	+	Crece
$x = 2$	$f'(2) = 0$, cambia de + a -		Máximo relativo
$(2, +\infty)$	$x = 3 : (3)(-1) = -3$	-	Decrece

Calculamos las ordenadas sustituyendo en la función:

$$f(0) = 0^2 e^0 = 0, \quad f(2) = 2^2 e^{-2} = \frac{4}{e^2}.$$

Conclusión: hay un mínimo relativo en $(0, 0)$ y un máximo relativo en $(2, 4/e^2)$. La función decrece en $(-\infty, 0)$, crece en $(0, 2)$ y vuelve a decrecer en $(2, +\infty)$.

d) Puntos de inflexión.

Derivamos de nuevo usando el producto, ahora sobre $f'(x) = e^{-x}(2x - x^2)$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -e^{-x}(2x - x^2) + e^{-x}(2 - 2x) \\ &= e^{-x}(x^2 - 4x + 2). \end{aligned}$$

Como $e^{-x} > 0$, resolvemos $x^2 - 4x + 2 = 0$:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}.$$

Para confirmar que son inflexiones, probamos el signo del factor cuadrático. Es positivo fuera de las dos raíces y negativo entre ellas; por ejemplo, vale $2 > 0$ en $x = 0$, $-1 < 0$ en $x = 2$ y $2 > 0$ en $x = 4$. La segunda derivada cambia de signo en ambas raíces. Los puntos de inflexión tienen abscisas

$$x = 2 - \sqrt{2} \text{ y } x = 2 + \sqrt{2}.$$

e) Asíntotas y representación cualitativa.

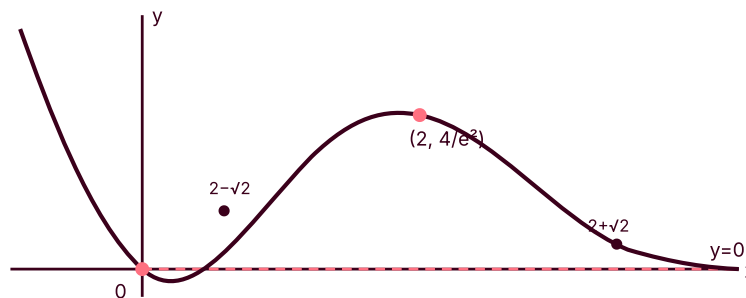
No hay asíntotas verticales porque el dominio es todo $\mathbb{R}$. Comprobamos los límites en los dos extremos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{-x} = +\infty.$$

Por tanto, $y = 0$ es asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$, pero no cuando $x \rightarrow -\infty$. También comprobamos las oblicuas. Su pendiente tendría que ser un límite finito $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)/x$. Aquí

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-x} = -\infty.$$

En el extremo derecho ya hay una horizontal (pendiente cero), no una oblicua; en el izquierdo no existe pendiente finita. Así que no hay asíntotas oblicuas. La curva pasa por el origen, baja hasta su mínimo, sube hasta el máximo de abscisa 2 y luego desciende acercándose a $y = 0$:



Problema B.1 · Determinantes

Se da

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \det T = \sqrt{2},$$

donde T es cuadrada de orden 3. Para los apartados b) y c) primero calculamos $\det M$, desarrollando por la primera fila:

$$\begin{aligned} \det M &= 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1(-2) - 2(-4) + 1(0) = 6. \end{aligned}$$

a) Calcula $\det(\frac{1}{2}T)$.

Al multiplicar una matriz de orden 3 por un número c , su determinante queda multiplicado por c^3 : $\det(cT) = c^3 \det T$. Por tanto,

$$\det\left(\frac{1}{2}T\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

b) Calcula $\det(M^4)$.

La propiedad del determinante de un producto da $\det(AB) = \det A \det B$, así que $\det(M^4) = (\det M)^4$. Sustituimos el valor obtenido:

$$\det(M^4) = 6^4 = 1296.$$

c) Calcula $\det(TM^3T^{-1})$

Aplicamos la misma propiedad a los tres factores. Además, $\det(T^{-1}) = 1/\det T$, porque $TT^{-1} = I$ y $\det I = 1$:

$$\begin{aligned} \det(TM^3T^{-1}) &= \det T \det(M^3) \det(T^{-1}) \\ &= \det T (\det M)^3 \frac{1}{\det T} \\ &= 6^3 = 216. \end{aligned}$$

El factor $\det T$ se cancela con su recíproco; por eso el resultado no depende de cuál sea la matriz T .

Problema B.2 · Familia de planos

La recta se da como intersección de dos planos. La ponemos en forma paramétrica tomando $y = t$:

$$r : \begin{cases} x - 4y = 0, \\ y - z = 0 \end{cases} \implies r : \begin{cases} x = 4t, \\ y = t, \\ z = t, \end{cases} \vec{d}_r = (4, 1, 1).$$

La familia de planos, ya en forma general, es

$$\pi_\alpha : (2 + 2\alpha)x + y + \alpha z - 2 - 6\alpha = 0, \vec{n}_\alpha = (2 + 2\alpha, 1, \alpha).$$

a) Elige el plano que pasa por $(1, 1, 0)$.

Un punto pertenece a un plano si sus coordenadas satisfacen la ecuación. Sustituimos $(1, 1, 0)$:

$$(2 + 2\alpha)(1) + 1 + \alpha(0) - 2 - 6\alpha = 0 \implies 1 - 4\alpha = 0 \implies \alpha = \frac{1}{4}.$$

Al sustituir el parámetro en la ecuación del plano,

$$\left(2 + 2 \cdot \frac{1}{4}\right)x + y + \frac{1}{4}z - 2 - 6 \cdot \frac{1}{4} = 0,$$

$$\frac{5}{2}x + y + \frac{1}{4}z - \frac{7}{2} = 0.$$

Multiplicamos toda la ecuación por 4 para quitar denominadores, sin cambiar el plano:

$$\boxed{10x + 4y + z - 14 = 0.}$$

b) Elige el plano paralelo a la recta.

Una recta es paralela a un plano cuando su vector director es perpendicular al vector normal del plano. Es decir, $\vec{d}_r \cdot \vec{n}_\alpha = 0$. Sustituimos:

$$(4, 1, 1) \cdot (2 + 2\alpha, 1, \alpha) = 0,$$

$$4(2 + 2\alpha) + 1 + \alpha = 0 \implies 9 + 9\alpha = 0 \implies \alpha = -1.$$

Al sustituir $\alpha = -1$ en la ecuación general de la familia:

$$(2 - 2)x + y - z - 2 + 6 = 0 \implies \boxed{y - z + 4 = 0}.$$

La dirección $(4, 1, 1)$ cumple $(0, 1, -1) \cdot (4, 1, 1) = 0$, que verifica el paralelismo.

c) Elige el plano perpendicular a la recta.

Si un plano es perpendicular a la recta, la normal del plano es paralela al vector director de la recta. Aquí necesitamos que

$$(2 + 2\alpha, 1, \alpha) = c(4, 1, 1)$$

para algún escalar c . La segunda componente obliga a $c = 1$, y entonces la tercera da $\alpha = 1$; la primera queda $2 + 2(1) = 4$, consistente. Sustituimos $\alpha = 1$ en la familia:

$$4x + y + z - 2 - 6 = 0 \implies \boxed{4x + y + z - 8 = 0}.$$

Problema B.3 · Distancia sobre un arco parabólico y área

El coche se mueve por el arco $2y = 36 - x^2$, con $-6 \leq x \leq 6$, y medimos su distancia al punto fijo $Q = (0, 9)$. Despejamos y :

$$y = 18 - \frac{x^2}{2}, \quad -6 \leq x \leq 6.$$

a) Expresión de la distancia.

La distancia entre (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. El punto del arco es $(x, 18 - x^2/2)$, así que

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{(x - 0)^2 + \left(18 - \frac{x^2}{2} - 9\right)^2} \\ &= \sqrt{x^2 + \left(9 - \frac{x^2}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{x^4 - 32x^2 + 324}, \quad -6 \leq x \leq 6. \end{aligned}$$

El radicando es siempre positivo, pues

$$x^4 - 32x^2 + 324 = (x^2 - 16)^2 + 68 > 0.$$

Así, la distancia está definida y es positiva en todo el intervalo.

b) Puntos del arco donde la distancia tiene mínimos relativos

Para evitar derivar una raíz, estudiamos $F(x) = f(x)^2$. Como $f(x) > 0$, elevar al cuadrado conserva el orden: los puntos donde F alcanza extremos son los mismos que los de f . Además, $f'(x) = F'(x)/(2f(x))$, cuyo denominador es positivo, así que f' y F' tienen el mismo signo. Desarrollamos y derivamos:

$$\begin{aligned} F(x) &= x^2 + \left(9 - \frac{x^2}{2}\right)^2, \\ F'(x) &= 2x + 2\left(9 - \frac{x^2}{2}\right)(-x) = x^3 - 16x = x(x - 4)(x + 4). \end{aligned}$$

Los puntos críticos interiores son $x = -4, 0, 4$. Probamos el signo de F' entre ellos y en los dos extremos del intervalo:

Intervalo o punto	Valor de prueba en $x(x - 4)(x + 4)$	Signo	Comportamiento de f
$[-6, -4)$	$x = -5 : (-5)(-9)(-1) = -45$	-	Decrece
$x = -4$	$F' = 0$, cambia de - a +	0	Mínimo relativo
$(-4, 0)$	$x = -2 : (-2)(-6)(2) = 24$	+	Crece
$x = 0$	$F' = 0$, cambia de + a -	0	Máximo relativo
$(0, 4)$	$x = 2 : (2)(-2)(6) = -24$	-	Decrece
$x = 4$	$F' = 0$, cambia de - a +	0	Mínimo relativo
$(4, 6]$	$x = 5 : (5)(1)(9) = 45$	+	Crece

En los puntos de mínimo, las ordenadas de la parábola son

$$y(\pm 4) = 18 - \frac{16}{2} = 10,$$

por lo que los dos mínimos relativos están en $\boxed{(-4, 10)}$ y $\boxed{(4, 10)}$.

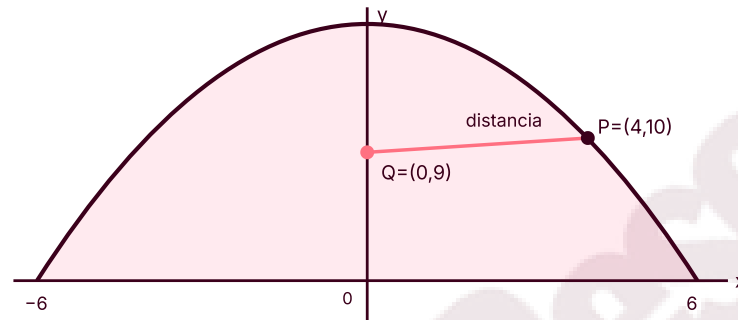
c) Valores máximo y mínimo absolutos

La distancia es continua en el intervalo cerrado $[-6, 6]$, así que alcanza un máximo y un mínimo absolutos. Hay que comparar sus valores en los puntos críticos interiores y en los extremos del intervalo. Comparamos los valores en $x = -4, 0, 4, -6, 6$:

$$f(\pm 4) = \sqrt{16 + (9 - 8)^2} = \sqrt{17},$$

$$f(0) = \sqrt{0 + 9^2} = 9, \quad f(\pm 6) = \sqrt{36 + (9 - 18)^2} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}.$$

Como $\sqrt{17} < 9 < 3\sqrt{13}$, el mínimo absoluto es $\sqrt{17}$, en $x = \pm 4$, y el máximo absoluto es $3\sqrt{13}$, en los extremos $x = \pm 6$. Los extremos del intervalo se han comprobado aparte; no son puntos críticos interiores.



d) Área encerrada por el arco y el segmento del eje x

En $[-6, 6]$, el arco tiene ecuación $y = 18 - x^2/2$ y el segmento inferior es $y = 0$. La fórmula del área entre dos curvas es la integral de «curva superior menos curva inferior»:

$$\mathcal{A} = \int_{-6}^6 \left[\left(18 - \frac{x^2}{2} \right) - 0 \right] dx.$$

Integramos cada término: $\int 18 dx = 18x$ y $\int x^2/2 dx = x^3/6$. Por ello,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \left[18x - \frac{x^3}{6} \right]_{-6}^6 \\ &= \left(18 \cdot 6 - \frac{6^3}{6} \right) - \left(18(-6) - \frac{(-6)^3}{6} \right) \\ &= (108 - 36) - (-108 + 36) = 72 - (-72) = 144. \end{aligned}$$

El área pedida es **144 unidades²**.