

EJERCICIO A

PROBLEMA 1. Obtener todos los valores reales x, y, z, t para los que se verifica $A X = X A$, siendo

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (3,3 \text{ puntos}).$$

Solución:

La ecuación a resolver $A X = X A$ en forma matricial será, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Efectuando los productos matriciales $\begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ 3x+4z & 3y+4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y & 2x+4y \\ z+3t & 2z+4t \end{pmatrix}$

Esta igualdad matricial da lugar al siguiente sistema

$$\begin{cases} x+2z = x+3y \\ y+2t = 2x+4y \\ 3x+4z = z+3t \\ 3y+4t = 2z+4t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y-2z = 0 \\ 2x+3y-2t = 0 \\ 3x+3z-3t = 0 \\ 3y-2z = 0 \end{cases}$$

Como la ecuaciones 1ª y 4ª son la misma, el sistema queda

$$\begin{cases} 3y-2z = 0 \\ 2x+3y-2t = 0 \\ 3x+3z-3t = 0 \end{cases}$$

Es un sistema homogéneo, será compatible. Estudiemos el rango de la matriz de coeficientes,

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Como la matriz tiene coeficientes} \\ \text{no nulos, al menos tiene rango 1.} \\ \text{Buscamos un menor de orden 2} \\ \text{no nulo, por ejemplo,} \end{array} \quad \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 - 6 = -6 \neq 0$$

Al menor no nulo anterior le añadimos una columna y una fila, obtenemos los siguientes menores,

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -(-18) - 18 = 18 - 18 = 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -18 - (-18) = 0$$

Como estos menores de orden 3 son nulos y el menor de orden 2 no lo era, la matriz de coeficientes tiene rango 2, que es menor que el número de incógnitas, 4, luego el sistema será compatible indeterminado.

Para resolverlo escogemos las ecuaciones correspondientes al menor no nulo, es decir,

$$\begin{cases} 3y = 2z & \text{de la 1ª ecuación} \\ 2x + 3y = 2t & \text{despejamos la } y \end{cases} \quad y = \frac{2z}{3} \quad \text{sustituyendo en la 2ª} \quad 2x + 3 \cdot \frac{2z}{3} = 2t$$

$$\text{luego } 2x + 2z = 2t \rightarrow x + z = t \rightarrow x = -z + t$$

$$\text{La solución del sistema será } \begin{cases} x = -\lambda + \mu \\ y = \frac{2}{3}\lambda \\ z = \lambda \\ t = \mu \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Podemos añadir que la matriz X buscada será una matriz de la forma

$$X = \begin{pmatrix} -z+t & \frac{2}{3}z \\ z & t \end{pmatrix} \quad z, t \in \mathbb{R}$$

EJERCICIO A

- PROBLEMA 2.** a) Obtener el plano que pasa por el punto $P(-2,4,-3)$ y es perpendicular a la recta $r : (x,y,z) = (1,2,0) + t(1,-2,1)$ (1 punto).
 b) Calcular la distancia entre el punto P y la recta r (2,3 puntos).

Solución:

- a) Como el plano buscado es perpendicular a la recta r , el vector director de la recta $(1,-2,1)$ será ortogonal al plano, por lo tanto la ecuación del plano será $x - 2y + z + D = 0$
 el plano debe pasar por el punto $P(-2,4,-3)$, luego $-2 - 2 \cdot 4 + (-3) + D = 0$, $-2 - 8 - 3 + D = 0$
 $-13 + D = 0$, es decir $D = 13$
 El plano tendrá de ecuación $x - 2y + z + 13 = 0$

- b) Para calcular la distancia del punto P a la recta r utilizamos la siguiente fórmula

$$d(P,r) = \frac{\left| \vec{RP} \times \vec{d}_r \right|}{\left| \vec{d}_r \right|} \quad \text{siendo } R \text{ un punto de la recta } r \text{ y } \vec{d}_r \text{ el vector director de } r.$$

En nuestro problema $R(1,2,0)$, $P(-2,4,-3)$, $\vec{RP}(-3,2,-3)$ y $\vec{d}_r(1,-2,1)$.

$$\vec{RP} \times \vec{d}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 0\vec{j} + 4\vec{k} = (-4,0,4)$$

$$\left| \vec{RP} \times \vec{d}_r \right| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$\left| \vec{d}_r \right| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$\text{Por lo tanto, } d(P,r) = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{2}\sqrt{6}}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{12}}{6} = \frac{4 \cdot 2\sqrt{3}}{6} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \quad u.l.$$

EJERCICIO A

PROBLEMA 3. Sea $f(x) = x^2 + m x$ (donde m es un parámetro real) y $f'(x)$ la función derivada de $f(x)$. Se pide:

- a) Hallar el valor del parámetro m para que $f(x)$ tenga un mínimo relativo en $x = -3/4$ (1,5 puntos).
 b) Para el valor de m calculado en a), determinar el área de la región comprendida entre la curva $y = f(x)$ y la recta de ecuación $y = f'(x)$ (1,8 puntos).

Solución:

Como $f(x)$ es un polinomio de 2º grado en x , es una función continua y derivable en $\mathbb{R}$.

- a) Para que $f(x)$ tenga un mínimo relativo en $x = -3/4$ debe ser $f'(-3/4) = 0$ y $f''(-3/4) > 0$

$$f'(x) = 2x + m \quad f''(x) = 2$$

$$2(-3/4) + m = 0 \rightarrow -3/2 + m = 0 \rightarrow m = 3/2$$

Como $f''(x) = 2 > 0$ (siempre), para $m = 3/2$ la función $f(x)$ tiene un mínimo relativo en $x = -3/4$

- b) Hay que calcular el área de la región comprendida entre las funciones

$$f(x) = x^2 + \frac{3}{2}x \quad \text{y} \quad f'(x) = 2x + \frac{3}{2}$$

Estas dos funciones son continuas y derivables en todo $\mathbb{R}$ (son funciones polinómicas) por lo tanto podremos aplicar la regla de Barrow para calcular el área comprendida entre ellas.

Buscamos los puntos de corte entre las dos funciones, para ello resolvemos la ecuación:

$$x^2 + \frac{3}{2}x = 2x + \frac{3}{2} \Rightarrow 2x^2 + 3x = 4x + 3 \Rightarrow 2x^2 - x - 3 = 0$$

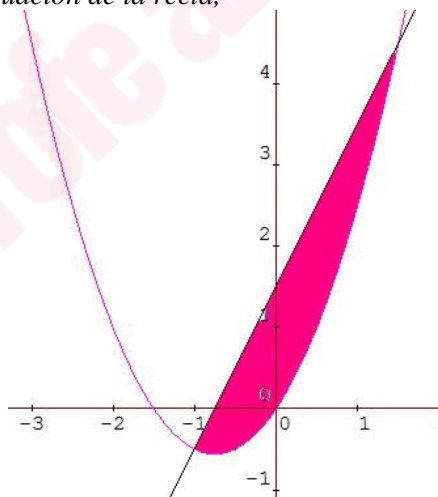
$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4} \begin{cases} x_1 = \frac{1+5}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ x_2 = \frac{1-5}{4} = \frac{-4}{4} = -1 \end{cases}$$

Calculamos las ordenadas de los dos puntos de corte para realizar una representación aproximada de las dos funciones y del área que queremos calcular.

Calculamos las ordenadas a partir de la ecuación de la recta,

$$\text{Para } x = \frac{3}{2} \rightarrow y = 2 \cdot \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\text{Para } x = -1 \rightarrow y = 2(-1) + \frac{3}{2} = \frac{-1}{2}$$



$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{3/2} \left(2x + \frac{3}{2} - \left(x^2 + \frac{3}{2}x \right) \right) dx = \int_{-1}^{3/2} \left(-x^2 + \frac{x}{2} + \frac{3}{2} \right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} + \frac{3}{2}x \right]_{-1}^{3/2} = \\ &= \left[-\frac{(3/2)^3}{3} + \frac{(3/2)^2}{4} + \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 2} \right] - \left[-\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{4} + \frac{3}{2}(-1) \right] = \frac{-27}{8} + \frac{9}{4} + \frac{9}{4} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} \right) = \\ &= \frac{-9}{8} + \frac{9}{16} + \frac{9}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = \frac{-54 + 27 + 108 - 16 - 12 + 72}{48} = \frac{207 - 82}{48} = \frac{125}{48} u^2 \end{aligned}$$

EJERCICIO A

PROBLEMA 4.1. a) Se tiene inicialmente 10 bacterias en un cultivo de laboratorio y cada día se duplican. Averigua, razonadamente, el número de bacterias que habrá cuando hayan transcurrido 10 días (1 punto).

b) Para otro cultivo, sea $P(t)$ el número de bacterias transcurrido el tiempo t medido en días. Averigua el aumento del número de bacterias al cabo de 10 días, sabiendo que $P(0)=500$, $P(3)=1100$ y que la derivada $P'(t)$ es constante para $0 \leq t \leq 10$ (2,3 puntos).

Solución:

a) El problema lo podemos presentar mediante la siguiente tabla:

días transcurridos	0	1	2	3
nº de bacterias	10	20	40	80
término		N_1	N_2	N_3

El número de bacterias forma una progresión geométrica de razón 2.

Llamando $N(t)$ al número de bacterias al cabo de t días, $N(t) = N_1 2^{t-1} = 20 \cdot 2^{t-1} = 10 \cdot 2^t$

$N(10) = 10 \cdot 2^{10} = 10240$, cuando hayan transcurrido 10 días habrá 10240 bacterias.

b) Sabemos que $P(t)$ es tal que $P(0) = 500$, $P(3) = 1100$ y $P'(t) = K$ $0 \leq t \leq 10$

Como $P'(t) = K$ $0 \leq t \leq 10$ entonces $P'(t)$ es continua en el intervalo $[0, 10]$.

Puesto que conocemos $P(0)$ y $P(3)$ consideramos el intervalo $[0, 3]$ en el que $P'(t)$ es, también, continua y como $P(t)$ es una primitiva de $P'(t)$ podemos aplicar la regla de Barrow:

$$\int_0^3 P'(t) dt = P(3) - P(0)$$

$$\int_0^3 K dt = P(3) - P(0)$$

$$[Kt]_0^3 = 1100 - 500$$

$$[K \cdot 3 - K \cdot 0] = 600$$

$$3K = 600 \rightarrow K = 200$$

Para averiguar el aumento de bacterias aplicamos la regla de Barrow en el intervalo $[0, 10]$ a la función $P'(t)=200$,

$$\int_0^{10} 200 dt = P(10) - P(0)$$

$$[200t]_0^{10} = P(10) - P(0)$$

$$[200 \cdot 10 - 200 \cdot 0] = P(10) - P(0)$$

$$2000 = P(10) - P(0)$$

Al cabo de 10 días ha habido un aumento de 2000 bacterias. Como inicialmente había 500 bacterias (valor de $P(0)$), al cabo de 10 días habrá 2500 bacterias.

EJERCICIO A

PROBLEMA 4.2. Durante 6 años consecutivos, la producción industrial x de una empresa, medida en toneladas métricas, fue: 110, 125, 130, 140, 150 y 155, mientras que las compras efectuadas, expresadas en millones de euros, fueron: 30, 41, 43, 47, 50 y 55. Se pide:

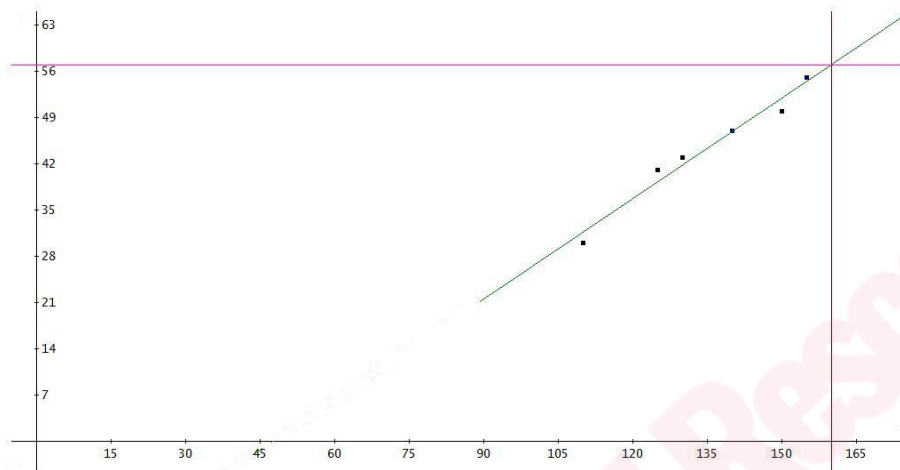
a) Representar los 6 puntos (x,y) (es decir, (110,30), (125,41), (130,43), (140,47), (150,50) y (155, 55) en unos ejes OXY y dibujar aproximadamente la recta de regresión de y sobre x . Sobre esta recta, obtener ahora gráficamente la predicción de compras a efectuar para una producción industrial de 160 toneladas métricas (1,3 puntos).

b) Explicar cómo se ha hecho el dibujo de la recta y la predicción (1 punto).

c) Razonar si se puede predecir o no las compras para una producción de 400 toneladas métricas (1 punto).

Solución:

a)



b) La recta de regresión de y sobre x la trazamos de manera que se ajuste a la nube de puntos que tenemos.

Para obtener la ecuación de la recta de regresión efectuamos los siguientes cálculos,

x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$	
110	30	12100	900	3300	$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{810}{6} = 135$
125	41	15625	1681	5125	
130	43	16900	1849	5590	$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{266}{6} = 44'333$
140	47	19600	2204	6580	
150	50	22500	2500	7500	$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{110750}{6} - 135^2} = 15'28$
155	55	24025	3025	8525	
810	266	110750	12164	36620	$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{n} - \bar{y}^2} = \sqrt{\frac{12164}{6} - 44'333^2} = 7'867$
					$\sigma_{xy} = \frac{\sum x_i y_i}{n} - \bar{x} \bar{y} = \frac{36620}{6} - 135 \cdot 44'333 = 118'33$
					$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{118'33}{15'28 \cdot 7'867} = 0'9847$

Como el coeficiente de correlación (r) es 0'9847 y está muy próximo a 1 la recta de regresión nos sirve para hacer predicciones para valores de x comprendidos o cercanos al rango de valores de x estudiados, [110,155].

La ecuación de la recta de regresión de y sobre x es $y - \bar{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x - \bar{x})$

La predicción de compras a efectuar para una producción industrial de 160 toneladas métricas la calculamos sustituyendo en la ecuación anterior el valor de x por 160,

$$y - 44'333 = \frac{118'33}{15'28^2}(160 - 135) \rightarrow y = 57'01$$

la predicción de compras será de 57'01 millones de euros (aproximadamente el valor que se obtiene en el gráfico).

c) El valor de 400 Tm está muy alejado del rango de valores de Tm estudiados (de 110 a 155) por lo que no podemos realizar una predicción de las compras para esta producción.

EJERCICIO B

PROBLEMA 1. Para las matrices reales: $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

- Justificar que existe la matriz A^{-1} , inversa de A , y calcular el determinante de A^{-1} (1,2 puntos).
- Calcula la matriz $B = A (A + 4 I)$ (0,7 puntos).
- Determinar los números reales x, y, z, t que cumplen $A^{-1} = x A + y I$, $A^2 = z A + t I$ (1,4 puntos)

Solución:

a) Como A es una matriz cuadrada de orden 3 tendrá inversa si su determinante es no nulo, calculémoslo:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 6 - 6 - (-10 + 6) = -12 - (-4) = -12 + 4 = -8 \neq 0$$

Como el determinante de A es no nulo existe A^{-1} .

Calculemos $|A^{-1}|$

Sabemos, por definición, que $A \cdot A^{-1} = I$

También sabemos que $|A \cdot B| = |A| |B|$ siendo A y B matrices cuadradas de orden n .

Como A y A^{-1} son matrices cuadradas de orden 3,

$|I| = |A \cdot A^{-1}| = |A| |A^{-1}|$, como $|I| = 1$

$|A| |A^{-1}| = 1$, por lo tanto $|A^{-1}| = 1 / |A|$

En nuestro caso $|A^{-1}| = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$

b) Calculamos $A + 4 I$

$$A + 4I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = A(A + 4I) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-3+2 & 1+1-2 & -2-6+8 \\ 9-15+6 & -3+5-6 & 6-30+24 \\ 3-3+0 & -1+1+0 & 2-6+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

A partir del resultado anterior podemos decir que $B = -4 I$

c) Para no tener que calcular A^{-1} transformamos la primera condición multiplicándola por la derecha por A , $A^{-1} A = x A A + y I A$

$I = x A^2 + y A$

Calculemos la matriz A^2

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3+2 & 1+5-2 & -2-6+0 \\ -3-15+6 & -3+25-6 & 6-30+0 \\ -1-3+0 & -1+5+0 & 2-6+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -8 \\ -12 & 16 & -24 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

La primera condición expresada matricialmente sería:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 0 & 4 & -8 \\ -12 & 16 & -24 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

que da lugar al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 1 = -y \\ 0 = 4x - y \\ 0 = -8x + 2y \\ 0 = -12x + 3y \\ 1 = 16x - 5y \\ 0 = -24x + 6y \\ 0 = -4x + y \\ 0 = 4x - y \\ 1 = -4x \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{En este sistema se verifica que:} \\ 3^{\text{a}} \text{ ecuación} = -2 \cdot 2^{\text{a}} \text{ ecuación,} \\ 4^{\text{a}} = -3 \cdot 2^{\text{a}}, \\ 6^{\text{a}} = -6 \cdot 2^{\text{a}}, \\ 7^{\text{a}} = -1 \cdot 2^{\text{a}}, \\ 8^{\text{a}} = 2^{\text{a}}, \\ \text{luego las ecuaciones } 3^{\text{a}}, 4^{\text{a}}, 6^{\text{a}}, 7^{\text{a}} \text{ y } 8^{\text{a}} \text{ son} \\ \text{proporcionales a la } 2^{\text{a}} \text{ ecuación; podemos} \\ \text{eliminarlas y el sistema queda reducido a} \end{array} \quad \begin{cases} 1 = -y \\ 0 = 4x - y \\ 1 = 16x - 5y \\ 1 = -4x \end{cases}$$

De la primera ecuación obtenemos $y = -1$

de la última ecuación $x = -1/4$. Veamos si estos valores de x e y cumplen las otras dos ecuaciones:

$$\begin{array}{l|l} 0 = 4 \cdot \frac{-1}{4} - (-1) & 1 = 16 \cdot \frac{-1}{4} - 5(-1) \\ 0 = -1 + 1 & 1 = -4 + 5 \\ 0 = 0 & 1 = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Cumplen } 2^{\text{a}} \text{ ecuación} \\ \text{Cumplen } 3^{\text{a}} \text{ ecuación} \end{array}$$

Luego $x = -1/4$ e $y = -1$ son solución del sistema.

Estudiemos ahora la 2^{a} condición $A^2 = zA + tI$

La expresión matricialmente sería:

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & -8 \\ -12 & 16 & -24 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que da lugar al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 = -z + t \\ 4 = -z \\ -8 = 2z \\ -12 = 3z \\ 16 = -5z + t \\ -24 = 6z \\ -4 = z \\ 4 = -z \\ -4 = t \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{En este sistema se verifica que las} \\ \text{ecuaciones } 2^{\text{a}}, 3^{\text{a}}, 4^{\text{a}}, 6^{\text{a}}, 7^{\text{a}} \text{ y } 8^{\text{a}} \text{ son} \\ \text{la misma } -4 = z. \\ \text{El sistema queda reducido a} \end{array} \quad \begin{cases} 0 = -z + t \\ 16 = -5z + t \\ -4 = z \\ -4 = t \end{cases}$$

La tercera y cuarta ecuación indican $z = -4$ y $t = -4$. Veamos si estos valores de z y t cumplen las otras dos ecuaciones:

$$\begin{array}{l|l} 0 = -(-4) + (-4) & 16 = -5(-4) + (-4) \\ 0 = 4 - 4 & 16 = 20 - 4 \\ 0 = 0 & 16 = 16 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Cumplen } 1^{\text{a}} \text{ ecuación} \\ \text{Cumplen } 3^{\text{a}} \text{ ecuación} \end{array}$$

Luego $z = -4$ y $t = -4$ son solución del sistema.

Por tanto los valores de x, y, z, t buscados son $x = \frac{-1}{4}, y = -1, z = -4, t = -4$

EJERCICIO B

PROBLEMA 2. Consideramos los puntos: A = (1,0,0), B = (0,1,0), C = (0,0,1) y D = (2,1,2). Se pide

- Hallar el área del triángulo de vértices B, C y D (1,1 puntos).
- Calcular el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D (1,1 puntos).
- Hallar la distancia del punto A al plano que pasa por los puntos B, C y D (1,1 puntos).

Solución:

- a) Para calcular el área del triángulo de vértices B, C y D usamos la fórmula

$$A = \frac{1}{2} \left| \vec{BC} \times \vec{BD} \right|$$

Calculamos los vectores indicados,

$$\vec{BC} = (0,0,1) - (0,1,0) = (0,-1,1) \quad \text{y} \quad \vec{BD} = (2,1,2) - (0,1,0) = (2,0,2)$$

$$\vec{BC} \times \vec{BD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\left| \vec{BC} \times \vec{BD} \right| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{Luego } A = \frac{1}{2} 2\sqrt{3} = \sqrt{3} \text{ u. a.}$$

- b) El volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D se obtiene como sigue

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (C_1 - C_2) = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{-1}{6} (-1 - 1 - 2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\text{El volumen del tetraedro es } \frac{2}{3} \text{ u.v.}$$

- c) Dado un punto A(x₀, y₀, z₀) y un plano π: a x + b y + c z + d = 0

$$d(a, \pi) = \frac{|a x_0 + b y_0 + c z_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Cálculo del plano π:

El plano π pasa por los puntos B, C y D; obtenemos los vectores $\vec{BC}$ y $\vec{BD}$

y calculamos su producto vectorial (ya obtenido en el apartado a), el vector que obtenemos (-2,2,2) es perpendicular al plano π.

Del plano π conocemos: un punto, por ejemplo, B (0,1,0) y
un vector normal al plano (-2,2,2)

La ecuación del plano π será:

$$-2(x-0) + 2(y-1) + 2(z-0) = 0$$

$$-2x + 2y - 2 + 2z = 0$$

$$-x + y + z - 1 = 0$$

Finalmente,

$$d(a, \pi) = \frac{|-1+0+0-1|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ u. l.}$$

EJERCICIO B

PROBLEMA 3. a) Obtener razonadamente la siguiente integral $\int \frac{4x+11}{(x+1)^2+1} dx$ (2,3 puntos).

b) Aplicando la regla de Barrow, calcular $\int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{4x+11}{(x+1)^2+1} dx$ (1 punto).

Solución:

a) Para obtener esta integral calculamos la derivada del denominador con el fin de expresar el numerador de la forma adecuada,

$$D = (x+1)^2 + 1, \quad D' = 2(x+1) = 2x+2$$

Expresamos el numerador como sigue, $4x+11 = 4x+4+7 = 2(2x+2)+7$

$$\int \frac{4x+11}{(x+1)^2+1} dx = \int \frac{2(2x+2)+7}{(x+1)^2+1} dx = \int \frac{2(2x+2)}{(x+1)^2+1} dx + \int \frac{7}{(x+1)^2+1} dx =$$

$$= 2 \int \frac{2x+2}{(x+1)^2+1} dx + \int \frac{7}{(x+1)^2+1} dx = 2 \ln |(x+1)^2+1| + 7 \arctan(x+1) + C$$

Como para cualquier valor de x , $(x+1)^2+1 > 0$, podemos eliminar el valor absoluto del argumento del logaritmo; el resultado de la integral queda como sigue,

$$= 2 \ln((x+1)^2+1) + 7 \arctan(x+1) + C$$

b) Para poder aplicar la regla de Barrow el integrando debe ser una función continua en el intervalo definido por los límites de integración. Como el denominador, $(x+1)^2+1$, es siempre positivo, es distinto de cero para cualquier valor de x , por lo que el integrando es una función continua en $\mathbb{R}$.

Considerando el resultado obtenido en el apartado anterior,

$$\int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{4x+11}{(x+1)^2+1} dx = \left[2 \ln((x+1)^2+1) + 7 \arctan(x+1) \right]_0^{\sqrt{3}-1} =$$

$$= \left(2 \ln((\sqrt{3}-1+1)^2+1) + 7 \arctan(\sqrt{3}-1+1) \right) - \left(2 \ln((0+1)^2+1) + 7 \arctan(0+1) \right) =$$

$$= 2 \ln(3+1) + 7 \arctan \sqrt{3} - 2 \ln 2 - 7 \arctan 1 = 2 \ln 4 + 7 \frac{\pi}{3} - 2 \ln 2 - 7 \frac{\pi}{4} = 2 \ln 2^2 - 2 \ln 2 + 7 \frac{\pi}{3} - 7 \frac{\pi}{4} =$$

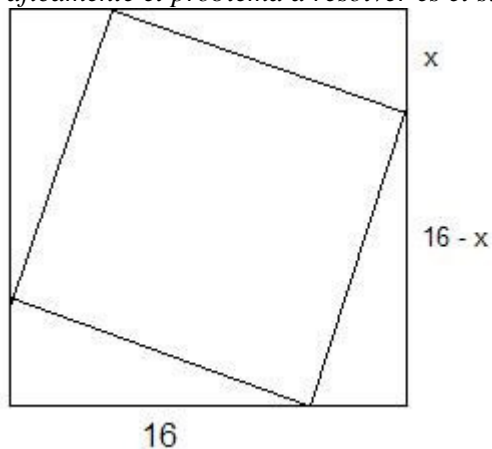
$$= 4 \ln 2 - 2 \ln 2 + \frac{28\pi - 21\pi}{12} = 2 \ln 2 + \frac{7\pi}{12}$$

EJERCICIO B

PROBLEMA 4.1. Determinar razonadamente la longitud del lado del cuadrado de área mínima cuyos vértices están situados sobre los lados de otro cuadrado de lado 16 cm (3,3 puntos).

Solución:

Gráficamente el problema a resolver es el siguiente,



Para el cálculo de las áreas de los cuadrados podemos considerar que la del cuadrado inscrito es la del grande menos las áreas de cuatro triángulos rectángulos cuyos catetos miden x y $16 - x$.

Llamando A_g al área del cuadrado de lado 16 y A_p a la del inscrito se cumple,

$$A_g = 16^2 = 256$$

$$A_p = 256 - 4x(16 - x)/2 = 256 - 32x + 2x^2, x \in [0, 16]$$

Buscaremos el valor de x para el que A_p es mínima.

Consideramos la función $A_p(x) = 256 - 32x + 2x^2$, $x \in [0, 16]$

$A_p(x)$ está definida como un polinomio de 2º grado y este polinomio es continuo y derivable en $\mathbb{R}$, luego $A_p(x)$ será continua y derivable en el intervalo $[0, 16]$.

Para encontrar los valores de x en que $A_p(x)$ alcanza un mínimo relativo resolvemos la ecuación $A_p'(x) = 0$ y buscamos las soluciones que hagan $A_p''(x) > 0$

$$A_p'(x) = -32 + 4x$$

$$-32 + 4x = 0 \rightarrow 4x = 32 \rightarrow x = 8 \quad (8 \in [0, 16])$$

$$A_p''(x) = 4$$

$$A_p''(8) = 4 > 0$$

Para $x = 8$ $A_p(x)$ tiene un mínimo relativo, como $A_p(x)$ es un polinomio de 2º grado el mínimo relativo coincide con el mínimo absoluto, por lo tanto, para $x = 8$ el cuadrado inscrito es de área mínima.

Busquemos ahora el valor del lado de este cuadrado,

para $x = 8$ $A_p(8) = 256 - 32 \cdot 8 + 2 \cdot 8^2 = 256 - 256 + 128 = 128$ que es el área del cuadrado, luego el lado de este cuadrado será l de forma que $l^2 = 128$, es decir, $l = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$

Conclusión: el lado del cuadrado pedido mide $8\sqrt{2}$ cm.

EJERCICIO B

PROBLEMA 4.2. Una urna contiene 6 bolas blancas y 4 bolas negras. Se repite tres veces la siguiente operación: extraer una bola al azar, anotar su color y devolverla a la urna. Determinar la probabilidad de extraer más de una bola negra (2,3 puntos). Explicar en qué se fundamenta la probabilidad obtenida (1 punto).

Solución:

Como extraemos una bola, anotamos su color y la devolvemos, en cada extracción la urna es la misma; es decir repetimos la misma experiencia tres veces y nos interesa si ocurre un determinado suceso (bola negra).

Llamando X = número de bolas negras extraídas en tres extracciones con devolución

esta variable aleatoria seguirá una distribución binomial cuyos parámetros serán

$$\text{sea } N = \text{obtener bola negra} \quad P(N) = \frac{4}{10} = 0.4, \quad \begin{matrix} p=0.4 \\ q=0.6 \\ n=3 \end{matrix} \quad \text{Por lo tanto } X = B(3, 0.4).$$

Los valores que puede tomar la variable aleatoria X son 0, 1, 2 y 3.

El suceso $A = \text{"extraer más de una bola negra"}$ corresponde a $X > 1$, calculamos su probabilidad:

$$P(X > 1) = P(X = 2) + P(X = 3) = \binom{3}{2} 0.4^2 0.6 + \binom{3}{3} 0.4^3 0.6^0 = 3 \cdot 0.4^2 0.6 + 0.4^3 = 0.288 + 0.064 = 0.352$$

Tu Prof te al Rescate