

Modelo 2 de 2006

Funciones a trozos, integrales, sistemas y optimización.

Opción A - Ejercicio 1

Escribimos la función por tramos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x < 0, \\ x^2 - x, & x \geq 0. \end{cases}$$

En $x = 0$ las derivadas laterales son 1 y -1 , por lo que f no es derivable allí. En cada tramo,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x < 0, \\ 2x - 1, & x > 0. \end{cases}$$

Los puntos críticos son $x = -1/2$ y $x = 1/2$. El signo de la derivada muestra que f decrece en $(-\infty, -1/2)$, crece en $(-1/2, 0)$, decrece en $(0, 1/2)$ y luego crece en $(1/2, +\infty)$. Los mínimos relativos en $(-1/2, -1/4)$ y $(1/2, -1/4)$, y un máximo relativo en $(0, 0)$. **Opción A - Ejercicio 2**

(a) El denominador factoriza como $(x - 5)(x + 5)$. Dividiendo y descomponiendo en fracciones simples,

$$\frac{5x^2 - x - 160}{x^2 - 25} = 5 + \frac{3}{x - 5} - \frac{4}{x + 5}.$$

Así,

$$\int \frac{5x^2 - x - 160}{x^2 - 25} dx = 5x + 3 \ln |x - 5| - 4 \ln |x + 5| + C.$$

(b) Con $u = x^2 - 3x$, $du = (2x - 3)dx$, por lo que

$$\int (2x - 3) \tan(x^2 - 3x) dx = \int \tan u du = -\ln |\cos(x^2 - 3x)| + C.$$

Opción A - Ejercicio 3

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & -1 & -1 \\ 1 & \lambda & 1 & 4 \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda + 2 \end{pmatrix}.$$

Su determinante es

$$\det A = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 2).$$

El segundo factor es siempre positivo, pues su discriminante es $1 - 8 < 0$. Si $\lambda \neq 1$, entonces $\det A \neq 0$ y el sistema es SCD. Para $\lambda = 1$, el menor de las dos primeras filas y columnas 1,2 vale $2 \neq 0$, mientras que $\det A = 0$; por tanto $\text{rg } A = 2$. Las filas segunda y tercera de A coinciden, pero los términos independientes son 4 y 3. El menor de A^* formado por las dos primeras columnas y la columna ampliada vale $-2 \neq 0$, así que $\text{rg } A^* = 3$. El sistema es SI. No hay ningún caso SCI. Para $\lambda = 2$, el sistema es SCD y su solución es

$$(x, y, z) = \left(\frac{5}{8}, \frac{9}{8}, \frac{9}{8} \right).$$

Opción A - Ejercicio 4

Parametrizamos r como $(0, 1 + t, 3 + 2t)$. Los dos planos tienen normales $n = (1, 0, 1)$ y $n' = (0, 1, -1)$, de igual módulo $\sqrt{2}$. Por tanto, igualar las distancias equivale a igualar los valores absolutos de las expresiones de sus planos:

$$|z - 1| = |y - z - 3|.$$

Sustituyendo la parametrización,

$$|2 + 2t| = |-5 - t|.$$

Al considerar los dos signos se obtiene $t = 3$ o $t = -7/3$. Los puntos pedidos son

$$(0, 4, 9) \text{ y } \left(0, -\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}\right).$$

Opción B - Ejercicio 1

Sea p la longitud del alambre destinado al cuadrado; el resto, $1 - p$, forma la circunferencia, con $0 \leq p \leq 1$. El lado del cuadrado es $p/4$, y el radio de la circunferencia $(1 - p)/(2\pi)$. La suma de las áreas es

$$S(p) = \frac{p^2}{16} + \frac{(1-p)^2}{4\pi}.$$

Derivando,

$$S'(p) = \frac{p}{8} - \frac{1-p}{2\pi} = 0 \iff (\pi + 4)p = 4.$$

Como $S''(p) = 1/8 + 1/(2\pi) > 0$, el mínimo se alcanza en

$$p = \frac{4}{\pi + 4} \text{ m}, \quad 1 - p = \frac{\pi}{\pi + 4} \text{ m}.$$

Opción B - Ejercicio 2

Integramos dos veces la segunda derivada:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x + C_1, \quad f(x) = 2x^3 - 3x^2 + C_1x + C_2.$$

La tangente dada es $y = 4x - 7$, así que en $x = 2$ su pendiente es 4 y el punto de tangencia tiene ordenada 1. De $f'(2) = 4$ se obtiene $C_1 = -8$; de $f(2) = 1$, $C_2 = 13$. Por tanto,

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x + 13.$$

Opción B - Ejercicio 3

Como $AB^t = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$ y su determinante es $-28 \neq 0$, la ecuación $AB^t X = -2C$ se resuelve multiplicando por $(AB^t)^{-1}$:

$$X = (AB^t)^{-1}(-2C) = \begin{pmatrix} -1/7 & -1 \\ 5/14 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

Opción B - Ejercicio 4

Los puntos que trisecan AB se obtienen desde A sumando un tercio y dos tercios del vector

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-2 - 1, 3 - 0, 1 - (-2)) = (-3, 3, 3).$$

Son $(0, 1, -1)$ y $(-1, 2, 0)$. Para la segunda parte, la dirección de AB es $d = (-1, 1, 1)$. La recta de C tiene la misma dirección, pues $(x, y, z) = t(-1, 1, 1) + (0, 1, 0)$. Por eso $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ no depende de t . Tomando $C = (0, 1, 0)$,

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-3, 3, 3) \times (-1, 1, 2) = (3, 3, 0),$$

y el área es $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, independiente del punto C elegido en la recta.