

PROBLEMA A.1. Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 3 tales que $A^2 = -A - I$ y

$$2B^3 = B, \text{ siendo } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ la matriz identidad.}$$

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- La justificación de que la matriz A es invertible (2 puntos) y el cálculo de la matriz A^3 en función de A y de I (2 puntos).
- Los valores posibles del determinante de B . (3 puntos)
- El valor del determinante de la matriz B^2 , sabiendo que la matriz B tiene inversa (2 puntos).

Solución:

a) ¿ A es invertible?

$$A^2 = -A - I \quad (\text{despejando } I) \rightarrow I = -A^2 - A \quad (\text{sacando factor común } A) \rightarrow I = A(-A - I)$$

Por tanto, existe A^{-1} y $A^{-1} = -A - I$

Cálculo de A^3 ,

$$A^3 = A^2 \cdot A = (-A - I)A = -A^2 - A = I \quad (\text{según lo obtenido anteriormente})$$

Por tanto, $A^3 = I$

En la resolución de los siguientes apartados utilizaremos las siguientes propiedades de los determinantes:

$$|A \cdot B| = |A| |B|, \quad |A^n| = |A|^n, \quad |nA| = \{ \text{por ser } A \text{ } 3 \times 3 \} = n^3 |A|$$

b) ¿ $|B|$?

$$\text{Como } B = 2B^3 \rightarrow |B| = |2B^3| = (\text{como } B \text{ es } 3 \times 3) = 2^3 |B^3| = 8 |B|^3$$

$$\text{Luego, } |B| = 8 |B|^3 \rightarrow |B| - 8 |B|^3 = 0 \rightarrow |B| (1 - 8 |B|^2) = 0 \rightarrow$$

$$|B| = 0$$

$$1 - 8 |B|^2 = 0 \rightarrow 1 = 8 |B|^2 \rightarrow \frac{1}{8} = |B|^2 \rightarrow |B| = \pm \sqrt{\frac{1}{8}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Por tanto, los posibles valores del determinante de B son: $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, 0 y $\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) ¿ $|B^2|$? Sabiendo que existe B^{-1}

$$\text{Como } B = 2B^3 \text{ y como existe } B^{-1}$$

Multiplicando por la derecha por B^{-1}

$$B B^{-1} = 2 B^3 B^{-1}$$

$$B B^{-1} = 2 B^2 B B^{-1}$$

$$I = 2 B^2 I$$

$$I = 2 B^2$$

$$|I| = |2 B^2|, \text{ como } I \text{ es la matriz identidad y } B \text{ es } 3 \times 3$$

$$1 = 8 |B^2| \rightarrow |B^2| = \frac{1}{8}$$

$$\text{Por tanto, } |B^2| = \frac{1}{8}$$

PROBLEMA A.2. Se dan la recta $r: \begin{cases} x-2y-2z=1 \\ x+3y-z=1 \end{cases}$ y el plano $\pi: 2x+y+mz=n$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- Los valores de m y n para los que la recta r y el plano π se cortan en un punto.
(3 puntos)
- Los valores de m y n para los que la recta r y el plano π no se cortan.
(3'5 puntos)
- Los valores de m y n para los que la recta r está contenida en el plano π .
(3'5 puntos)

Solución:

a) ¿ m y n ? / $r \cap \pi = \text{punto}$

Para que r y π se corten en un punto, el sistema formado por las ecuaciones de la recta y el plano debe tener solución única (el punto de corte entre r y π), es decir, el sistema debe ser compatible y determinado.

Para que el sistema $r: \begin{cases} x-2y-2z=1 \\ x+3y-z=1 \\ 2x+y+mz=n \end{cases}$ sea compatible y determinado $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3$

Por tanto, para que $\text{ran}(A) = 3$ debe ser $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & m \end{vmatrix} \neq 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & m \end{vmatrix} = 3m - 2 + 4 + 12 + 1 + 2m = 5m + 15$$

$$5m + 15 = 0 \rightarrow 5m = -15 \rightarrow m = \frac{-15}{5} = -3$$

Para $m \neq -3$, $\text{ran}(A) = 3$ y como A' es 3×4 también $\text{ran}(A') = 3$

Luego, para que la recta r y el plano π se corten en un punto debe ser $m \neq -3$ y n cualquier valor.

Otra forma de resolverlo,

Obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta r ,

Como $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 2 = 5 \neq 0$, el sistema a resolver es: $\begin{cases} x-2y=1+2z \\ x+3y=1+z \end{cases}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1+2z & -2 \\ 1+z & 3 \end{vmatrix}}{5} = \frac{3+6z+2+2z}{5} = \frac{5+8z}{5} = 1 + \frac{8}{5}z$$

Resolviéndolo por Cramer,

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1+2z \\ 1 & 1+z \end{vmatrix}}{5} = \frac{1+z-1-2z}{5} = \frac{-z}{5}$$

$$\text{Por tanto, } r: \begin{cases} x = 1 + \frac{8}{5}\lambda \\ y = \frac{-1}{5}\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Sustituyendo los valores de x, y, z de la ecuación de la recta en el plano,

$$2 \cdot \left(1 + \frac{8}{5}\lambda\right) - \frac{1}{5}\lambda + m\lambda = n$$

$$2 + \frac{16}{5}\lambda - \frac{1}{5}\lambda + m\lambda = n$$

$$\left(\frac{16}{5} - \frac{1}{5} + m\right)\lambda = n - 2$$

$$(3 + m)\lambda = n - 2$$

$$\lambda = \frac{n - 2}{3 + m}$$

Para que haya punto de corte λ debe tener solución, por tanto $3 + m \neq 0$ y $n - 2$ cualquier valor, es decir, $m \neq -3$ y n cualquier valor.

Luego, **habrá punto de corte entre la recta r y el plano π cuando $m \neq -3$ y n cualquier valor.**

b) ¿ m y n ? / r y π no se cortan.

De lo estudiado en el apartado anterior, al resolver el corte entre recta y plano llegamos a la ecuación:

$$(3 + m)\lambda = n - 2$$

Para que no se corten, la ecuación no debe tener solución y para que esto ocurra debe ser:

$$3 + m = 0 \quad \text{y} \quad n - 2 \neq 0 \quad (\text{para que quede una ecuación de la forma } 0 = \text{núm} \neq 0)$$

$$\text{Por lo que, } m = -3 \quad \text{y} \quad n \neq 2$$

Por tanto, **r y π no se cortan para $m = -3$ y $n \neq 2$.**

c) ¿ m y n ? / $r \subset \pi$

Para que la recta r esté contenida en el plano π la ecuación que obtuvimos en el apartado a),

$$(3 + m)\lambda = n - 2, \quad \text{debe tener infinitas soluciones y para que esto ocurra debe ser:}$$

$$3 + m = 0 \quad \text{y} \quad n - 2 = 0 \quad (\text{para que quede una ecuación de la forma } 0 = 0)$$

$$\text{Por lo que, } m = -3 \quad \text{y} \quad n = 2$$

Por tanto, **r está contenida en π para $m = -3$ y $n = 2$.**

PROBLEMA A.3. Se consideran las curvas $y = x^3$, $y = ax$ y la función $f(x) = x^3 - ax$, siendo a un parámetro real y $a > 0$. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

- Los puntos de corte de la curva $y = f(x)$ con los ejes coordenados y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f . (1 + 2 puntos)
- La gráfica de la función f cuando $a = 9$. (3 puntos)
- Calcular en función del parámetro a , el área de la región acotada del primer cuadrante encerrada entre las curvas $y = x^3$ e $y = ax$, cuando $a > 1$. (2 puntos)
- El valor del parámetro a para el que el área obtenida en el apartado c) coincide con el área de la región acotada comprendida entre la curva $y = x^3$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 2$. (2 puntos)

Solución:

- a) Puntos de corte de $y = f(x)$ con los ejes coordenados.

$$x = 0 \rightarrow y = f(0) = 0^3 - a \cdot 0 = 0 \rightarrow (0, 0)$$

$$y = 0 \rightarrow x^3 - ax = 0 \rightarrow x(x^2 - a) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - a = 0 \rightarrow x^2 = a \rightarrow x = \pm\sqrt{a} \end{cases}$$

(como $a > 0 \rightarrow \exists \sqrt{a}$)

Los puntos de corte con los ejes coordenados son $(0, 0)$, $(\sqrt{a}, 0)$ y $(-\sqrt{a}, 0)$.

Monotonía.

$$y = x^3 - ax, \quad a > 0$$

$$y' = 3x^2 - a$$

$$3x^2 - a = 0$$

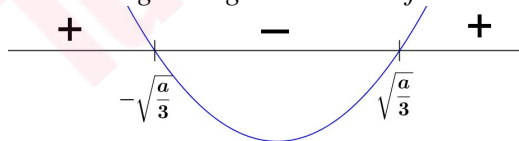
$$3x^2 = a$$

$$x^2 = \frac{a}{3} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{a}{3}}, \quad \text{como } a > 0 \rightarrow \exists \sqrt{\frac{a}{3}}$$

Hay que estudiar el signo de y' en los intervalos:



y' es un polinomio de segundo grado con coeficiente de x^2 positivo, luego



Por tanto, la función f es creciente en $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{a}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{a}{3}}, +\infty\right)$ y decreciente en $\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}, \sqrt{\frac{a}{3}}\right)$.

- b) Gráfica de f para $a = 9$.

Hay que representar la función $y = x^3 - 9x$

Dom $y = \mathbb{R}$, porque es una función polinómica.

Del estudio anterior sabemos:

Puntos de corte con los ejes coordenados: $(0, 0)$, $(3, 0)$ y $(-3, 0)$.

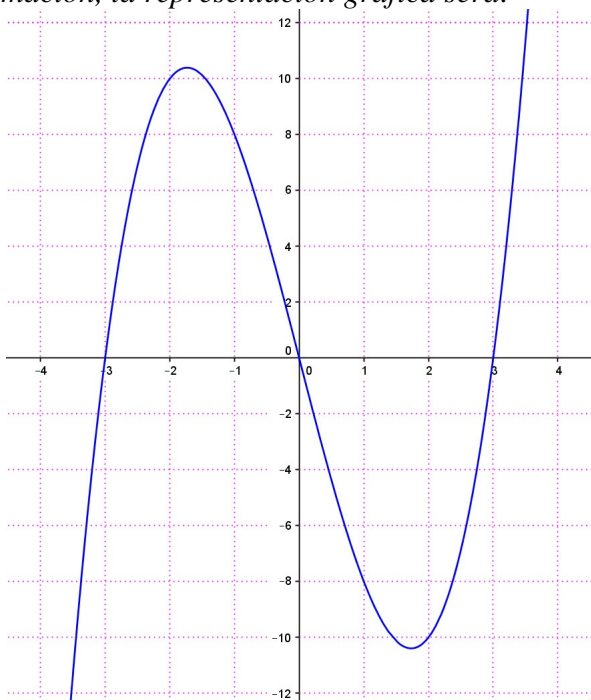
Monotonía: creciente en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$ y decreciente en $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

Extremos: $x = -\sqrt{3} \rightarrow y = (-\sqrt{3})^3 - 9 \cdot (-\sqrt{3}) = -3\sqrt{3} + 9\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

$x = \sqrt{3} \rightarrow y = (\sqrt{3})^3 - 9 \cdot (\sqrt{3}) = 3\sqrt{3} - 9\sqrt{3} = -6\sqrt{3}$

luego, en $(-\sqrt{3}, 6\sqrt{3}) \approx (-1.73, 10.39)$ hay un máximo relativo y en $(\sqrt{3}, -6\sqrt{3}) \approx (1.73, -10.39)$ hay un mínimo relativo.

Con esta información, la representación gráfica será:



c) Área entre $y = x^3$, $y = ax$ ($a > 1$), en 1^{er} cuadrante.

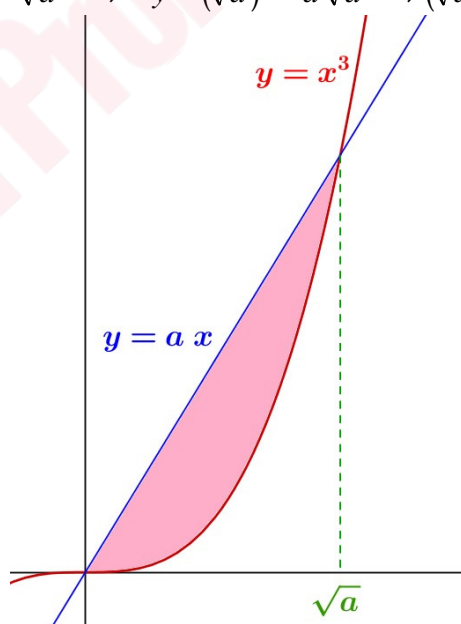
Calculemos los puntos de corte entre las dos curvas:

$x^3 = ax$, resuelta en el apartado a) " $x^3 - ax = 0$ ", las soluciones: $x = -\sqrt{a}$, $x = 0$ y $x = \sqrt{a}$

Como el área a calcular es en el 1^{er} cuadrante, las soluciones que nos interesan son $x = 0$ y $x = \sqrt{a}$.

Los puntos de corte serán: $x = 0 \rightarrow y = 0^3 = 0 \rightarrow (0, 0)$

$x = \sqrt{a} \rightarrow y = (\sqrt{a})^3 = a\sqrt{a} \rightarrow (\sqrt{a}, a\sqrt{a})$



La representación gráfica es:

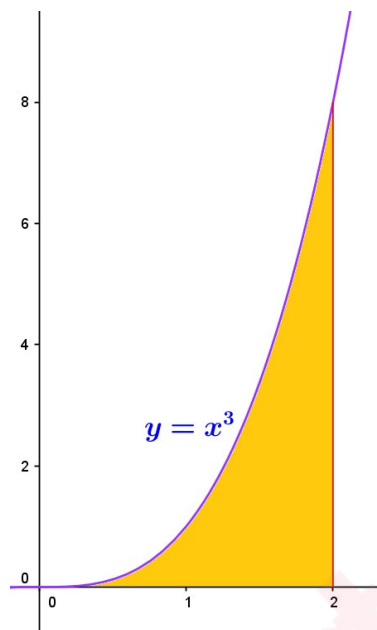
El área pedida la obtenemos mediante la siguiente integral definida,

$$\int_0^{\sqrt{a}} (ax - x^3) dx = \left[a \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^{\sqrt{a}} = \left(a \frac{(\sqrt{a})^2}{2} - \frac{(\sqrt{a})^4}{4} \right) - 0 = a \frac{a}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4}$$

Finalmente, el área de la región pedida es $\frac{a^2}{4}$ u.a.

d) Área entre $y = x^3$, eje OX , $x = 0$ y $x = 2$.

La representación gráfica del área a calcular es:



El área pedida la obtenemos mediante la siguiente integral definida,

$$\int_0^2 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4} = 4$$

Por tanto, $\frac{a^2}{4} = 4 \rightarrow a^2 = 16 \rightarrow$ (como $a > 0$) $a = 4$

Finalmente, el valor del parámetro a buscado es $a = 4$.

PROBLEMA B.1. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- La justificación de que A tiene matriz inversa y el cálculo de dicha inversa A^{-1} . (2 + 2 puntos)
- La justificación de que $A^4 = I$. (2 puntos)
- El cálculo de las matrices A^7 , A^{30} y A^{100} . (4 puntos)

Solución:

a) Calculemos, en primer lugar, $|A|$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}$$

Calculemos A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{menores}} \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego, } A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) ¿ $A^4 = I$?

$$\text{Calculemos } A^2, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Y finalmente, } A^4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Por tanto, **hemos comprobado que $A^4 = I$.**

c)

$$A^7 = A^4 A^3 = I A^3 = A^3 = A A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$A^{30} = (A^4)^7 A^2 = I^7 A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{100} = (A^4)^{25} = I^{25} = I$$

$$\text{Por tanto, } A^7 = A^{-1}, \quad A^{30} = A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A^{100} = I$$

Tu Profec al Rescate

PROBLEMA B.2. Se dan la recta $r: \frac{x-1}{4} = \frac{y}{a} = \frac{z-1}{-1}$ y el plano $\pi: 2x - y + bz = 0$, siendo a y b son dos parámetros reales.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- El punto de intersección de la recta r y el plano π cuando $a = -b = 1$. (2'5 puntos)
- La distancia entre la recta r y el plano π cuando $a = b = 4$. (2'5 puntos)
- La posición relativa de la recta r y del plano π en función de los valores de los parámetros a y b . (5 puntos)

Solución:

a) ¿ $r \cap \pi$ para $a = -b = 1$?

$$\text{Para } a = 1 \rightarrow r: \frac{x-1}{4} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}, \quad \text{para } b = -1 \rightarrow \pi: 2x - y - z = 0$$

$$\text{La ecuación paramétrica de } r: \begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Sustituyendo los valores de x, y, z en la ecuación del plano:

$$2(1 + 4\lambda) - \lambda - (1 - \lambda) = 0; \quad 2 + 8\lambda - \lambda - 1 + \lambda = 0; \quad 8\lambda + 1 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-1}{8}$$

$$\text{Por tanto, } \begin{cases} x = 1 + 4 \cdot \frac{-1}{8} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ y = \frac{-1}{8} \\ z = 1 - \frac{-1}{8} = 1 + \frac{1}{8} = \frac{9}{8} \end{cases}$$

Solución: el punto de corte entre r y π es $\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{8}, \frac{9}{8}\right)$.

b) ¿ $d(r, \pi)$ para $a = b = 4$?

$$\text{Para } a = 4 \rightarrow r: \frac{x-1}{4} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{-1}, \quad \text{para } b = 4 \rightarrow \pi: 2x - y + 4z = 0$$

Obtengamos la posición relativa entre r y π .

$$\text{La ecuación paramétrica de } r: \begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = 4\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Sustituyendo los valores de x, y, z en la ecuación del plano:

$$2(1 + 4\lambda) - 4\lambda + 4(1 - \lambda) = 0; \quad 2 + 8\lambda - 4\lambda + 4 - 4\lambda = 0; \quad 6 = 0, \#$$

por tanto la recta r y el plano π son paralelos.

Entonces $d(r, \pi) = d(P_r, \pi)$, siendo P_r un punto cualquiera de la recta r , por ejemplo $P_r(1, 0, 1)$.

$$d(P_r, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 - 0 + 4 \cdot 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 4^2}} = \frac{|6|}{\sqrt{21}} = \frac{6}{\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{21}}{7}$$

Solución: $d(r, \pi) = \frac{2\sqrt{21}}{7} \text{ u.l.}$

c) ¿Posición relativa entre r y π en función de a y b ?

$$r: \begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = a\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \pi: 2x - y + bz = 0$$

Sustituyendo los valores de x, y, z en la ecuación del plano:

$$2(1 + 4\lambda) - a\lambda + b(1 - \lambda) = 0$$

$$2 + 8\lambda - a\lambda + b - b\lambda = 0$$

$$2 + b + (8 - a - b)\lambda = 0$$

$$(8 - a - b)\lambda = -2 - b$$

Estudiemos esta ecuación,

Si $8 - a - b = 0$ y $-2 - b = 0$ entonces $r \subset \pi$

Resolviendo el sistema:
$$\begin{cases} 8 - a - b = 0 \\ -2 - b = 0 \end{cases}$$

De la 2ª ecuación: $b = -2$

Sustituyendo en la 1ª, $8 - a + 2 = 0$; $a = 10$

Si $8 - a - b = 0$ y $-2 - b \neq 0$ entonces $r \parallel \pi$

La 2ª condición, $b \neq -2$

De la 1ª condición, $8 - a = b \rightarrow a + b = 8$

Si $8 - a - b \neq 0$ y $(-2 - b)$ cualquier valor entonces r y π se cortan

De la condición, $a + b \neq 8$

Resumiendo lo anterior:

Si $a = 10$ y $b = -2$ la recta r está contenida en el plano π .

Si $b \neq -2$ y $a + b = 8$ la recta r es paralela al plano π .

Si $a + b \neq 8$ la recta r y el plano π se cortan.

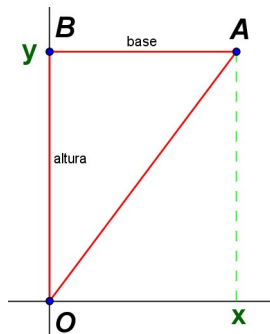
PROBLEMA B.3. Se considera el triángulo T de vértices $O = (0, 0)$, $A = (x, y)$ y $B = (0, y)$, siendo $x > 0$, $y > 0$, y tal que la suma de las longitudes de los lados OA y AB es 30 metros.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

- El área del triángulo T en función de x . (3 puntos)
- El valor de x para el que dicha área es máxima. (5 puntos)
- El valor de dicha área máxima. (2 puntos)

Solución:

a) ¿ A_T ?



La representación gráfica del triángulo T es:

$$A_T = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{x \cdot y}{2}$$

Como debemos expresar el área en función de x hay que buscar una relación entre x e y .

Del enunciado sabemos que $d(O, A) + d(A, B) = 30$ m. Por tanto:

$$\sqrt{x^2 + y^2} + x = 30, \text{ despejemos } y,$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 30 - x \rightarrow \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = (30 - x)^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 900 - 60x + x^2$$

$$y^2 = 900 - 60x \rightarrow y = \sqrt{900 - 60x} \quad (y > 0)$$

Para que se pueda calcular el valor de y debe ser $900 - 60x > 0 \rightarrow 60x < 900 \rightarrow x < 15$

Según el enunciado del problema $x > 0$.

$$\text{Por tanto, } A_T = \frac{x \sqrt{900 - 60x}}{2}, \quad 0 < x < 15$$

b) ¿ x ? / área es máxima

$$A'_T = \frac{1}{2} \left(1 \cdot \sqrt{900 - 60x} + x \cdot \frac{-60}{2\sqrt{900 - 60x}} \right) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{900 - 60x} - \frac{30x}{\sqrt{900 - 60x}} \right)$$

$$A'_T = 0$$

$$\frac{1}{2} \left(\sqrt{900 - 60x} - \frac{30x}{\sqrt{900 - 60x}} \right) = 0 \rightarrow \sqrt{900 - 60x} - \frac{30x}{\sqrt{900 - 60x}} = 0 \rightarrow 900 - 60x - 30x = 0$$

$$900 - 90x = 0 \rightarrow 900 = 90x \rightarrow x = 10$$

Estudiamos el signo de A'_T en el intervalo $(0, 15)$

$$x = 1 \rightarrow A'_T = \frac{1}{2} \left(\sqrt{900 - 60 \cdot 1} - \frac{30 \cdot 1}{\sqrt{900 - 60 \cdot 1}} \right) = 1175.. > 0$$

$$x = 11 \rightarrow A'_T = \frac{1}{2} \left(\sqrt{900 - 60 \cdot 11} - \frac{30 \cdot 11}{\sqrt{900 - 60 \cdot 11}} \right) = -2'90.. < 0$$

Por lo que:



Por lo tanto en $x = 10$ hay un máximo relativo que además es el absoluto porque la función a la izquierda de 10 es creciente y a la derecha es decreciente.

Solución: para que el área sea máxima $x = 10$.

c) Para $x = 10$ el valor del área es:

$$A_T(10) = \frac{10 \sqrt{900 - 60 \cdot 10}}{2} = 86'6025 \text{ m}^2$$

Solución: el valor de dicha área máxima es $86'6025 \text{ m}^2$.

Tu Profe al Rescate