

El examen propone dos opciones y se debe elegir una. Para repasar todos los contenidos, resolvemos los cuatro ejercicios de ambas opciones.

Opción A - Ejercicio 1

La función es $f(x) = x(e^{ax} + b)$, con $a \neq 0$. Si tiene un extremo relativo en $x = 0$, su derivada debe anularse allí. Derivando con la regla del producto,

$$f'(x) = e^{ax}(1 + ax) + b, \quad f'(0) = 1 + b = 0,$$

por lo que $b = -1$. Un punto de inflexión en $x = 1$ exige que la segunda derivada se anule en ese punto. Tenemos

$$f''(x) = ae^{ax}(2 + ax), \quad f''(1) = ae^a(2 + a) = 0.$$

Como $a \neq 0$ y $e^a > 0$, se deduce $a = -2$. Comprobamos las condiciones: con estos valores, $f'(0) = 0$ y $f''(0) = -4 < 0$, luego $x = 0$ es un máximo relativo; además, $f''(x) = -4e^{-2x}(1 - x)$ cambia de signo al pasar por $x = 1$, así que allí hay un punto de inflexión. En conclusión,

$$a = -2, \quad b = -1.$$

Opción A - Ejercicio 2

En el intervalo de integración, $x \geq 0$ y $2 + x^2 > 0$. Para integrar usamos que la derivada de $2 + x^2$ es $2x$, de modo que una primitiva de $x/(2 + x^2)$ es $\frac{1}{2} \ln(2 + x^2)$. Por tanto,

$$\int_0^a \frac{x}{2 + x^2} dx = \left[\frac{1}{2} \ln(2 + x^2) \right]_0^a = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2 + a^2}{2} \right).$$

Igualando a 1 y despejando,

$$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{2 + a^2}{2} \right) = 1 \implies \frac{2 + a^2}{2} = e^2 \implies a^2 = 2(e^2 - 1).$$

Como el enunciado pide $a > 0$, tomamos la raíz positiva:

$$a = \sqrt{2(e^2 - 1)}.$$

Opción A - Ejercicio 3

La matriz de coeficientes y el vector de términos independientes son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & m+2 & m \\ 1 & 1 & m+2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1-m \\ m \\ 7 \end{pmatrix}.$$

a) Calculamos el determinante para localizar los valores en que la matriz de coeficientes puede perder rango:

$$\begin{aligned} \det A &= ((m+2)^2 - m) - (-2m - 2) + 2(-m - 3) \\ &= m(m+3). \end{aligned}$$

Si $m \neq 0, -3$, el determinante es distinto de cero y $\text{rg}(A) = 3$. Por Rouché-Frobenius, el rango de la ampliada también es 3, así que el sistema es compatible determinado.

Para $m = 0$, la primera y la tercera fila de A coinciden, mientras que sus términos independientes son 1 y 7. Al restar esas ecuaciones aparece $0 = 6$, por lo que $\text{rg}(A) = 2$ y $\text{rg}(A^*) = 3$. El sistema es incompatible.

Para $m = -3$, la matriz ampliada queda

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 7 \end{array} \right).$$

Sumando la primera fila a la segunda y restándola de la tercera, las dos últimas filas resultantes son proporcionales. Hay dos filas independientes y no aparece contradicción, de modo que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$. Por Rouché-Frobenius, el sistema es compatible indeterminado. En resumen,

$m \neq 0, -3$	SCD
$m = 0$	SI
$m = -3$	SCI

b) Para $m = -3$, la suma de las dos primeras ecuaciones da $-z = 1$, luego $z = -1$. Sustituyéndolo en la primera, $x + y - 2 = 4$, es decir, $x + y = 6$. La familia de soluciones es

$$(x, y, z) = (t, 6 - t, -1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Si además $x = 2$, tomamos $t = 2$ y obtenemos

$$(x, y, z) = (2, 4, -1).$$

Opción A - Ejercicio 4

a) El punto del plano más próximo a $P = (3, 1, 2)$ es su proyección ortogonal sobre el plano. El vector normal de $\pi : x + 2y + z = 1$ es $\vec{n} = (1, 2, 1)$; la proyección se obtiene avanzando desde P en la dirección normal hasta llegar al plano:

$$H = P - \frac{\vec{n} \cdot P - 1}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}.$$

Aquí $\vec{n} \cdot P - 1 = 3 + 2 + 2 - 1 = 6$ y $\|\vec{n}\|^2 = 1 + 4 + 1 = 6$. Por tanto,

$$H = (3, 1, 2) - (1, 2, 1) = (2, -1, 1).$$

Comprobamos que pertenece al plano: $2 + 2(-1) + 1 = 1$.

b) Todo plano paralelo a π tiene ecuación $x + 2y + z = k$. Para $k \neq 0$, sus intersecciones con los ejes son $(k, 0, 0)$, $(0, k/2, 0)$ y $(0, 0, k)$. Tomamos dos vectores que forman el triángulo de intersecciones:

$$\vec{u} = (-k, k/2, 0), \quad \vec{v} = (-k, 0, k).$$

El área del triángulo es la mitad del módulo de su producto vectorial:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \|\vec{u} \times \vec{v}\| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k^4}{4} + k^4 + \frac{k^4}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{4} k^2.$$

Al imponer $\mathcal{A} = \sqrt{6}$, resulta $k^2 = 4$, es decir, $k = 2$ o $k = -2$. Los dos planos pedidos son

$$x + 2y + z = 2 \quad \text{O} \quad x + 2y + z = -2.$$

Opción B - Ejercicio 1

Llamamos x a la longitud total del solar en la dirección en que se colocan las tres parcelas y y a su otra dimensión. El área fija impone $xy = 12800$, así que $x = 12800/y$, con $y > 0$. La valla rodea el rectángulo y también incluye las dos separaciones interiores, ambas de longitud y . Por tanto, su longitud es

$$P = 2x + 2y + 2y = 2x + 4y = \frac{25600}{y} + 4y.$$

Para hallar el mínimo, derivamos e igualamos a cero:

$$P'(y) = -\frac{25600}{y^2} + 4 = 0 \implies y^2 = 6400 \implies y = 80 \text{ m},$$

porque y representa una longitud positiva. Además, $P''(y) = 51200/y^3 > 0$ para $y > 0$, así que este punto crítico da el mínimo. La otra dimensión es $x = 12800/80 = 160$ m. Al dividir el lado de 160 m en tres partes iguales, cada parcela mide $160/3$ m por 80 m. En conclusión,

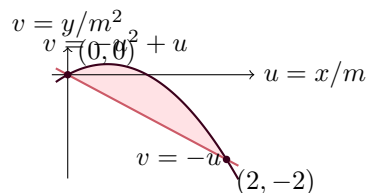
$$\text{solar: } 160 \text{ m} \times 80 \text{ m}; \quad \text{cada parcela: } \frac{160}{3} \text{ m} \times 80 \text{ m}.$$

Opción B - Ejercicio 2

Las intersecciones de $y = -x^2 + mx$ y $y = -mx$ se obtienen igualando las expresiones:

$$-x^2 + mx = -mx \implies x(2m - x) = 0 \implies x = 0 \text{ o } x = 2m.$$

Los puntos de corte son $(0, 0)$ y $(2m, -2m^2)$. Entre 0 y $2m$, la diferencia entre la parábola y la recta es $x(2m - x) > 0$, así que la parábola queda por encima. Para el esbozo usamos $u = x/m$ y $v = y/m^2$; de este modo, la forma del recinto no depende del valor de m :



El área real se calcula integrando la función superior menos la inferior entre las abscisas de corte:

$$\mathcal{A} = \int_0^{2m} [(-x^2 + mx) - (-mx)] dx = \left[-\frac{x^3}{3} + mx^2 \right]_0^{2m} = \frac{4m^3}{3}.$$

Imponemos que el área sea 36:

$$\frac{4m^3}{3} = 36 \implies m^3 = 27.$$

Como $m > 0$, el valor buscado es

$$\boxed{m = 3}.$$

Opción B - Ejercicio 3

Sean A , B y C los beneficios, en millones de euros, de las tres empresas. Los datos del enunciado se traducen en

$$B = A + C, \quad A = \frac{B + C}{2}.$$

Sustituyendo la primera igualdad en la segunda,

$$2A = (A + C) + C \implies A = 2C,$$

y entonces $B = A + C = 3C$. Las tres cantidades quedan en la proporción $A : B : C = 2 : 3 : 1$.

a) Saber además que A es el doble de C no aporta una ecuación nueva: es una consecuencia de las dos relaciones iniciales. Si escribimos $C = t$, todas las soluciones son $(A, B, C) = (2t, 3t, t)$. Por tanto, no se pueden determinar cantidades únicas sin conocer un dato adicional.

b) Con el dato de que entre las empresas suman 210 millones,

$$A + B + C = 2t + 3t + t = 6t = 210 \implies t = 35.$$

Así, $C = 35$, $A = 70$ y $B = 105$, en millones de euros:

$$\boxed{A = 70, \quad B = 105, \quad C = 35}.$$

Opción B - Ejercicio 4

a) El vector director de r , calculado con sus dos puntos, es

$$\vec{d}_r = \overrightarrow{AB} = B - A = (3 - 1, -1 - 1, 1 - 0) = (2, -2, 1).$$

Para escribir s en forma paramétrica ponemos $y = t$. Entonces $x = -1 - 2t$ y $z = -1 - t$, de modo que

$$s : \begin{cases} x = -1 - 2t, \\ y = t, \\ z = -1 - t, \end{cases} \quad \vec{d}_s = (-2, 1, -1).$$

El plano que pasa por el origen y es paralelo a ambas rectas contiene los dos vectores directores. Por ello, un vector normal se obtiene con su producto vectorial:

$$\vec{n} = \vec{d}_r \times \vec{d}_s = (2, -2, 1) \times (-2, 1, -1) = (1, 0, -2).$$

Al pasar el plano por el origen, su término independiente es cero. La ecuación general es

$$x - 2z = 0.$$

b) Un plano perpendicular a s tiene como vector normal un vector director de s . Usamos $\vec{n}_s = (-2, 1, -1)$ y el punto $B = (3, -1, 1)$. La ecuación punto-normal es

$$-2(x - 3) + (y + 1) - (z - 1) = 0,$$

que, al desarrollar, queda en forma general

$$-2x + y - z + 8 = 0.$$