

El examen ofrece dos opciones; se desarrollan ambas para repasar todos sus ejercicios.

Opción A - Ejercicio 1

Sea y la altura del rectángulo medida desde la base del triángulo. Por semejanza de triángulos, el ancho disponible a esa altura disminuye linealmente desde 6 m hasta 0 m cuando la altura pasa de 0 a 4 m. Así, el ancho del rectángulo es

$$w(y) = 6 \left(1 - \frac{y}{4}\right) = 6 - \frac{3}{2}y, \quad 0 \leq y \leq 4.$$

El área que queremos maximizar es

$$A(y) = y w(y) = 6y - \frac{3}{2}y^2.$$

Buscamos los puntos críticos y comprobamos su naturaleza:

$$A'(y) = 6 - 3y = 0 \implies y = 2, \quad A''(y) = -3 < 0.$$

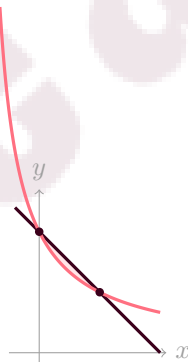
Este punto da el máximo; en los extremos del intervalo el área es nula. Para $y = 2$, el ancho vale $w(2) = 3$. Por tanto, las dimensiones del rectángulo de área máxima son $3 \text{ m} \times 2 \text{ m}$ y su área es 6 m^2 .

Opción A - Ejercicio 2

Las funciones son $f(x) = 2 - x$ y $g(x) = \frac{2}{x+1}$, con $x \neq -1$. Para hallar los cortes igualamos ambas expresiones:

$$2 - x = \frac{2}{x+1} \iff (2-x)(x+1) = 2 \iff x(1-x) = 0.$$

Así, se cortan en $(0, 2)$ y $(1, 1)$. En el intervalo $[0, 1]$, la recta queda por encima de la hipérbola (por ejemplo, en $x = \frac{1}{2}$ sus valores son $\frac{3}{2}$ y $\frac{4}{3}$). El esbozo señala la región cerrada:



El área es la integral de la función superior menos la inferior entre las abscisas de corte:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^1 \left(2 - x - \frac{2}{x+1}\right) dx \\ &= \left[2x - \frac{x^2}{2} - 2 \ln(x+1)\right]_0^1 = \boxed{\frac{3}{2} - 2 \ln 2}. \end{aligned}$$

Opción A - Ejercicio 3

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & m \\ m & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_m^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & m & m-2 \\ m & 1 & 3 & m-2 \end{array} \right).$$

El determinante de la matriz de coeficientes es

$$\det A_m = 2(m-2)(m+2).$$

Si $m \neq 2, -2$, el determinante no es nulo, así que $\text{rg}(A_m) = \text{rg}(A_m^*) = 3$, igual al número de incógnitas: el sistema es compatible determinado.

Para $m = 2$, la tercera ecuación es la suma de las dos primeras, también en sus términos independientes. Por tanto, ambos rangos valen 2 y, como hay tres incógnitas, el sistema es compatible indeterminado. Restando las dos primeras ecuaciones se obtiene $z = 3y$, y la segunda da $x = -5y$. Sus soluciones son

$$(x, y, z) = (-5t, t, 3t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para $m = -2$, las filas de coeficientes satisfacen $R_1 + 5R_2 = -3R_3$, pero los términos independientes no satisfacen esa misma relación: $0 + 5(-4) = -20 \neq 12 = -3(-4)$. El sistema es incompatible; en particular, $\text{rg}(A_{-2}) = 2$ y $\text{rg}(A_{-2}^*) = 3$. Así queda discutido para todos los valores de m .

Opción A - Ejercicio 4

La recta dada se escribe en forma paramétrica como

$$r: \quad x = 1 + 3t, \quad y = 2t, \quad z = t - 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

El segundo plano está dado por un punto $P_0 = (-4, 1, 0)$ y los vectores directores $\vec{u} = (1, 1, 0)$ y $\vec{v} = (-3, 0, 1)$. Su vector normal es $\vec{u} \times \vec{v} = (1, -1, 3)$, así que su ecuación general es $\pi_2: x - y + 3z + 5 = 0$. El primer plano tiene el mismo vector normal, por lo que los planos son paralelos. Los puntos equidistantes de ambos forman el plano intermedio

$$|x - y + 3z + 2| = |x - y + 3z + 5| \implies x - y + 3z + \frac{7}{2} = 0.$$

Sustituimos el punto genérico de r en esta ecuación:

$$(1 + 3t) - 2t + 3(t - 1) + \frac{7}{2} = 0 \implies t = -\frac{3}{8}.$$

El punto pedido es $\left(-\frac{1}{8}, -\frac{3}{4}, -\frac{11}{8}\right)$.

Opción B - Ejercicio 1

La función $f(x) = xe^{1/x}$ tiene dominio $[-1, 0) \cup (0, +\infty)$. En el punto problemático $x = 0$ estudiamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} xe^{1/x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} xe^{1/x} = +\infty.$$

Por tanto, $x = 0$ es una asíntota vertical por la derecha. En $x = -1$ la función está definida y es finita, de modo que ese extremo del dominio no es una asíntota.

Cuando $x \rightarrow +\infty$, la función crece sin cota y no tiene asíntota horizontal. Comprobamos si hay una oblicua $y = mx + n$: la pendiente y la ordenada se obtienen con

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1/x} = 1, \quad n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{1/x} - 1) = 1,$$

donde en el último límite usamos $\lim_{u \rightarrow 0}(e^u - 1)/u = 1$. La asíntota oblicua es $y = x + 1$.

Opción B - Ejercicio 2

Aplicamos el cambio sugerido $t = \sqrt{e^x} = e^{x/2}$. Entonces $e^x = t^2$, $dx = 2 dt/t$, y los límites cambian de $x = 2, 4$ a $t = e, e^2$:

$$\begin{aligned} \int_2^4 \frac{e^x}{1 + \sqrt{e^x}} dx &= \int_e^{e^2} \frac{t^2}{1+t} \frac{2}{t} dt = 2 \int_e^{e^2} \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt \\ &= 2[t - \ln(1+t)]_e^{e^2} = 2(e^2 - e - \ln(1+e^2) + \ln(1+e)). \end{aligned}$$

Opción B - Ejercicio 3

Como $\det M = 2 \neq 0$, la matriz M es invertible y tiene rango 3. Por tanto, M^3 también es invertible y

$$\boxed{\operatorname{rg}(M^3) = 3}.$$

Usando $\det(M^t) = \det M$, la regla $\det(kC) = k^3 \det C$ para matrices de orden 3, y las propiedades del determinante de un producto y de una inversa, resulta

$$\boxed{\det(2M^t) = 2^3 \det(M^t) = 16},$$

$$\boxed{\det((M^{-1})^2) = \left(\frac{1}{\det M}\right)^2 = \frac{1}{4}}.$$

Intercambiar dos filas cambia el signo del determinante; así, para la matriz N del apartado d), $\boxed{\det N = -2}$.

Opción B - Ejercicio 4

Calculamos dos vectores del cuadrilátero restando las coordenadas de sus extremos:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1, -1, 0), \quad \overrightarrow{AC} = C - A = (1, -3, -2).$$

Un vector normal al plano que pasa por A, B, C es su producto vectorial:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (2, -2, 4) = 2(1, -1, 2).$$

Tomando el normal $(1, -1, 2)$ y el punto $A(0, 5, 3)$, la ecuación del plano es

$$x - y + 2z - 1 = 0.$$

El punto $D(2, 3, 1)$ satisface $2 - 3 + 2 - 1 = 0$, luego los cuatro puntos son coplanarios. Además,

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (2, -2, -2), \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -2 + 2 + 0 = 0.$$

Los lados opuestos son paralelos ($\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{BC}$) y dos lados consecutivos son perpendiculares; por tanto, $ABCD$ es un rectángulo. Su área es el producto de las longitudes de dos lados contiguos:

$$|AB| = \sqrt{2}, \quad |BC| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}, \quad \boxed{A = |AB| |BC| = 2\sqrt{6}}.$$