

Convocatoria de Junio de 2019

Resolución de las opciones A y B con desarrollo matemático y resultados exactos.

Opción A - Ejercicio 1

El dominio excluye $x = -1$, donde el denominador se anula. Dividiendo el numerador entre $2(x+1)$,

$$f(x) = \frac{x}{2} + 1 + \frac{1}{x+1}.$$

Al acercarnos a -1 , el último término diverge con signos opuestos a cada lado; por tanto, $x = -1$ es asíntota vertical. Como $f(x) - (x/2 + 1) = 1/(x+1) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$, la asíntota oblicua en ambos extremos es $y = x/2 + 1$; no hay horizontal.

La derivada es $f'(x) = 1/2 - 1/(x+1)^2$. Sus ceros son $x = -1 \pm \sqrt{2}$. El signo es positivo cuando $|x+1| > \sqrt{2}$ y negativo cuando $|x+1| < \sqrt{2}$. Separando además el punto excluido -1 , resulta creciente en $(-\infty, -1-\sqrt{2})$ y $(-1+\sqrt{2}, +\infty)$, y decreciente en $(-1-\sqrt{2}, -1)$ y $(-1, -1+\sqrt{2})$. Hay un máximo en $x = -1-\sqrt{2}$ y un mínimo en $x = -1+\sqrt{2}$; sus valores son, respectivamente, $1/2 - \sqrt{2}$ y $1/2 + \sqrt{2}$.

Opción A - Ejercicio 2

Con el cambio sugerido $t = e^x$, se tiene $dx = dt/t$ y

$$\int \frac{1+e^x}{1-e^x} dx = \int \frac{1+t}{t(1-t)} dt = \int \left(\frac{1}{t} + \frac{2}{1-t} \right) dt = x - 2\ln(e^x - 1) + C,$$

pues $x > 0$ implica $e^x - 1 > 0$. La condición $F(1) = 1$ determina $C = 2\ln(e-1)$. La primitiva pedida es

$$F(x) = x - 2\ln(e^x - 1) + 2\ln(e - 1).$$

Opción A - Ejercicio 3

Escribimos $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. De $AX = XA$ se obtiene $d = a$ y $c = -b$. La condición de traza da $2a = 1$, así que $a = d = 1/2$. Finalmente, $\det X = a^2 + b^2 = 1$ implica $b = \pm\sqrt{3}/2$ y $c = \mp\sqrt{3}/2$. Las matrices son

$$X = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad X = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Opción A - Ejercicio 4

La recta tiene forma paramétrica $r: (x, y, z) = (2-t, 2+3t, 1+t)$. La distancia de un punto (x, y, z) a los planos coordenados $x = 0$ e $y = 0$ es $|x|$ e $|y|$, respectivamente. Por tanto, $|2-t| = |2+3t|$, cuya resolución da $t = 0$ o $t = -2$. Los puntos son $(2, 2, 1)$ y $(4, -4, -1)$.

La intersección de ambos planos es el eje z , con director $(0, 0, 1)$. No es paralela a r , cuyo director es $(-1, 3, 1)$; tampoco se cortan, pues en r la condición $x = y = 0$ exigiría $t = 2$ y $2+3t = 0$ simultáneamente. Así que son rectas alabeadas. Su distancia es

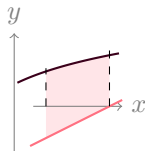
$$d = \frac{|((-2, -2, -1) \cdot ((-1, 3, 1) \times (0, 0, 1)))|}{|(-1, 3, 1) \times (0, 0, 1)|} = \frac{8}{\sqrt{10}} = \frac{4\sqrt{10}}{5}.$$

Opción B - Ejercicio 1

Como $f(x) = (x-a)e^x$, su derivada es $f'(x) = (x-a+1)e^x$. El punto crítico $x = 0$ exige $1-a = 0$, luego $a = 1$. Para ese valor, $f''(x) = (x+1)e^x$, que cambia de signo en $x = -1$. La ordenada es $f(-1) = -2/e$, así que el punto de inflexión es $(-1, -2/e)$.

Opción B - Ejercicio 2

El dominio de $f(x) = \ln(x+2)$ es $x > -2$. En $[1, 3]$ la diferencia entre las curvas es $h(x) = \ln(x+2) - (x-3)/2$. Como $h'(x) = 1/(x+2) - 1/2 < 0$ en ese intervalo y $h(3) = \ln 5 > 0$, f está por encima de g . Una primitiva de la diferencia es



$$H(x) = (x+2) \ln(x+2) - (x+2) - \frac{x^2}{4} + \frac{3x}{2}.$$

Así, el área entre las gráficas y las rectas verticales es

$$S = H(3) - H(1) = 5 \ln 5 - 3 \ln 3 - 1.$$

Opción B - Ejercicio 3

Al transponer $X^t A = B^t$ queda $A^t X = B$. Para la matriz de coeficientes A^t ,

$$\det(A^t) = \det A = -2(m-1)^2(m+2).$$

Si $m \neq 1, -2$, el determinante no se anula y el sistema es SCD. Para $m = -2$, un menor de orden dos vale -9 , por lo que $\text{rg } A^t = 2$; además, al sumar las tres ecuaciones se obtiene $0 = 6$, así que $\text{rg } A^* = 3$: es SI. Para $m = 1$, las tres filas de la matriz ampliada coinciden, de modo que $\text{rg } A^t = \text{rg } A^* = 1 < 3$ y el sistema es SCL. En conclusión:

$$m \neq 1, -2 : \text{SCD}; \quad m = -2 : \text{SI}; \quad m = 1 : \text{SCL}.$$

Opción B - Ejercicio 4

Los vectores desde A son $\overrightarrow{AB} = B - A = (0, -1, 2)$ y $\overrightarrow{AC} = C - A = (-1, 1, 1)$. Su producto vectorial es $(-3, -2, -1)$, de módulo $\sqrt{14}$. El área del triángulo es la mitad:

$$\mathcal{A} = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

El coseno del ángulo en A se calcula con el producto escalar:

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{15}}.$$