

Soluciones originales, desarrolladas a partir del enunciado.

Bloque A

Ejercicio 1 · Sistema matricial y operaciones

Para resolver simultáneamente $2X - Y = 4A$ y $X + Y = B$, sumamos las ecuaciones para eliminar Y :

$$3X = 4A + B \implies X = \frac{4A + B}{3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Después usamos $X + Y = B$:

$$Y = B - X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ se puede escribir como $I + N$, con $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $N^2 = 0$. Por el binomio, $C^n = I + nN$, de modo que

$$C^{2024} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2024 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si D es 2×3 , entonces D^t es 3×2 , mientras que A y B son 2×2 . El producto $A^t B + D D^t$ está definido y es 2×2 . En cambio, $D B^t$ no existe porque las dimensiones interiores son 3 y 2; tampoco se puede sumar $D^t A^t$ (orden 3×2) con D (orden 2×3).

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad C^{2024} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2024 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{solo } A^t B + D D^t \text{ está definida y es } 2 \times 2.$$

Ejercicio 2 · Optimización de los ingresos

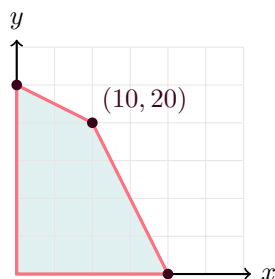
Sean x y y el número de pulseras de tipo A y B . Las existencias de oro, platino y plata imponen

$$x + 2y \leq 50, \quad 2x + y \leq 40, \quad y \leq 25, \quad x, y \geq 0.$$

Queremos maximizar $I(x, y) = 150x + 200y$. Los vértices factibles, obtenidos al intersectar las restricciones, son $(0, 0)$, $(20, 0)$, $(10, 20)$ y $(0, 25)$. Evaluamos los ingresos en cada uno:

(x, y)	$(0, 0)$	$(20, 0)$	$(10, 20)$	$(0, 25)$
$I(x, y)$	0	3000	5500	5000

El máximo se obtiene en $(10, 20)$. En esa combinación se usan $10 + 2(20) = 50$ g de oro, $2(10) + 20 = 40$ g de platino y 20 g de plata; por tanto, sobran 0 g de oro, 0 g de platino y 5 g de plata.



10 pulseras A , 20 pulseras B ; $I_{\max} = 5500$ €; sobran 0 g de oro, 0 g de platino y 5 g de plata.

Bloque B

Ejercicio 3 · Continuidad, derivabilidad y área

Para que la función sea continua, igualamos los valores de las ramas en los puntos de unión. En $x = 1$:

$$1 + a - 1 = b \implies a = b.$$

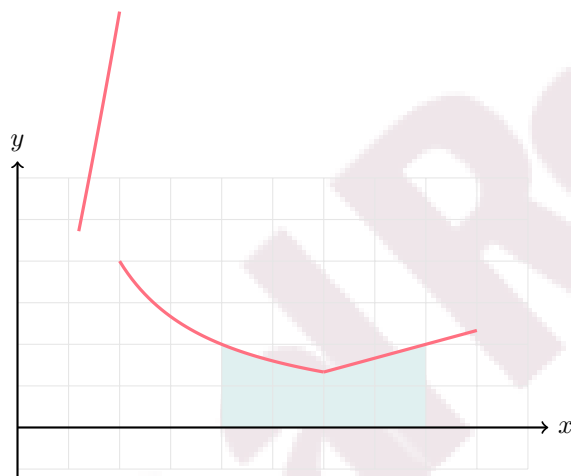
En $x = 3$:

$$\frac{b}{3} = \frac{3-1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Así, $a = b = 2/3$. Comprobamos las derivadas laterales: en $x = 1$ valen $2 + a = 8/3$ y $-b = -2/3$; en $x = 3$ valen $-b/9 = -2/27$ y $1/3$. No coinciden, así que la función es continua pero no derivable en ninguno de esos dos puntos.

Para el área del apartado b), con $a = 5, b = 2$, entre $x = 2$ y $x = 3$ la función es $2/x$ y entre $x = 3$ y $x = 4$ es $(x-1)/3$. Ambas son positivas, por lo que el área es la suma de las integrales:

$$\mathcal{A} = \int_2^3 \frac{2}{x} dx + \int_3^4 \frac{x-1}{3} dx = 2 \ln \frac{3}{2} + \left[\frac{x^2}{6} - \frac{x}{3} \right]_3^4 = 2 \ln \frac{3}{2} + \frac{5}{6}.$$



$$a = b = \frac{2}{3}; \quad f \text{ continua y no derivable en } x = 1, 3; \quad \mathcal{A} = 2 \ln \frac{3}{2} + \frac{5}{6}.$$

Ejercicio 4 · Continuidad, derivabilidad, monotonía y área

El dominio es $\mathbb{R}$: la rama racional solo se usa cuando $x > 2$, donde $x-1 \neq 0$. En el punto de unión,

$$f(2) = -\frac{1}{2}(2)^2 + 2 + 1 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-1} = 1,$$

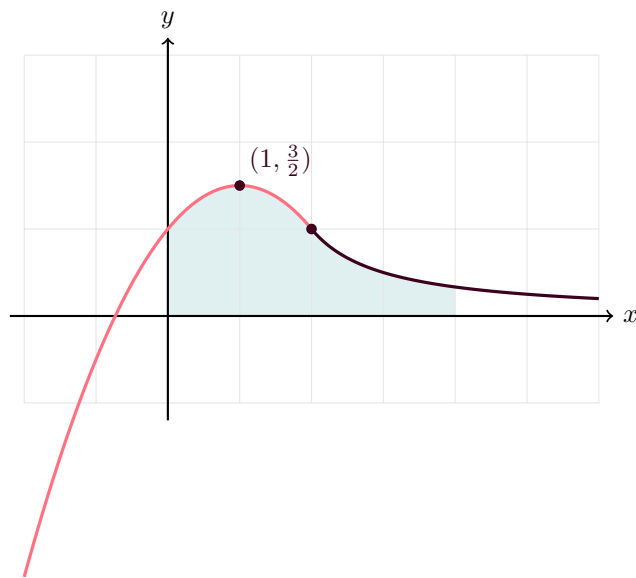
por lo que hay continuidad. Las derivadas laterales son $-x + 1$ y $-1/(x-1)^2$; ambas valen -1 en $x = 2$, así que también es derivable allí.

En la rama cuadrática, $f'(x) = 1 - x$: la función crece hasta $x = 1$ y decrece después. En la rama racional, $f'(x) = -1/(x-1)^2 < 0$, por lo que sigue decreciendo para $x > 2$. El máximo se encuentra en $x = 1$:

$$f(1) = -\frac{1}{2} + 1 + 1 = \frac{3}{2}.$$

La primera rama corta el eje X en $x = 1 - \sqrt{3}$ (la otra raíz, $1 + \sqrt{3}$, queda fuera de $x \leq 2$). La segunda rama es positiva. Para el área entre $x = 0$ y $x = 4$:

$$\mathcal{A} = \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}x^2 + x + 1 \right) dx + \int_2^4 \frac{1}{x-1} dx = \frac{8}{3} + \ln 3.$$



Crece en $(-\infty, 1)$, decrece en $(1, \infty)$; $f_{\max} = \frac{3}{2}$; $\mathcal{A} = \frac{8}{3} + \ln 3$.

Bloque C

Ejercicio 5 · Probabilidad e independencia

Sean A el suceso «profesa la religión A» y W «es mujer». Como el 30% profesa A y el 50% una religión distinta, el 20% no profesa ninguna.

$$P(A \cap W) = P(W | A)P(A) = 0,40(0,30) = 0,12.$$

Además, $P(A | W) = 0,25$, así que despejando $P(W)$:

$$P(W) = \frac{P(A \cap W)}{P(A | W)} = \frac{0,12}{0,25} = 0,48,$$

y por tanto $P(W^c) = 0,52$. Los sucesos no son independientes, ya que $P(A \cap W) = 0,12$ y $P(A)P(W) = 0,30(0,48) = 0,144$. Son compatibles porque su intersección no es vacía (tiene probabilidad 0,12).

$P(\text{ninguna religión}) = 0,20$; $P(\text{hombre}) = 0,52$; A y W no son independientes y sí son compatibles.

Ejercicio 6 · Probabilidad de ocupar un puesto directivo

Sean E «economista», L «abogado» y D «ocupa un puesto directivo». Las categorías profesionales son disjuntas; la proporción que no es economista ni abogado es $1 - 0,30 - 0,25 = 0,45$. Por probabilidad total,

$$P(D) = 0,30(0,75) + 0,25(0,60) + 0,45(0,15) = 0,4425.$$

La probabilidad de no ser directivo es $1 - 0,4425 = 0,5575$. Para invertir la condición en el segundo apartado usamos Bayes:

$$P(E | D) = \frac{P(D | E)P(E)}{P(D)} = \frac{0,75(0,30)}{0,4425} = \frac{30}{59}.$$

$$P(D^c) = 0,5575; \quad P(E | D) = \frac{30}{59} \approx 0,5085.$$

Bloque D

Ejercicio 7 · Afijación proporcional y media muestral

El número total de melones es 4000 y la muestra tiene 200, por lo que se toma el $200/4000 = 0,05$ de cada estrato. La variedad D contiene $4000 - 1420 - 980 - 720 = 880$ melones. Así, la muestra incluye 71 de tipo A , 49 de tipo B , 36 de tipo C y 44 de tipo D .

El peso de cada sandía es normal con $\mu = 3,85$ kg y $\sigma = 1,32$ kg. La media muestral de $n = 121$ sandías sigue una normal con media μ y desviación típica $\sigma/\sqrt{n}$:

$$\bar{X} \sim N\left(3,85, \left(\frac{1,32}{11}\right)^2\right) = N(3,85, 0,12^2).$$

Estandarizamos los extremos pedidos:

$$P(3,6 < \bar{X} < 4) = \Phi\left(\frac{4 - 3,85}{0,12}\right) - \Phi\left(\frac{3,6 - 3,85}{0,12}\right) = \Phi(1,25) - \Phi(-2,0833) \approx 0,8757.$$

$$(n_A, n_B, n_C, n_D) = (71, 49, 36, 44); \quad \bar{X} \sim N(3,85, 0,12^2); \quad P \approx 0,8757.$$

Ejercicio 8 · Estimación del tiempo de respuesta

La suma de los diez tiempos es 270 minutos, por lo que la media muestral es $\bar{x} = 27$ minutos. Como la desviación típica poblacional conocida es $\sigma = 5$ minutos, usamos el intervalo normal bilateral

$$\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Con confianza del 98%, $z_{0,99} \approx 2,3263$ y el margen es $2,3263(5/\sqrt{10}) \approx 3,6783$ minutos. Por tanto, el intervalo es $(23,3217, 30,6783)$. Su extremo superior es menor que 35, así que estos datos no permiten admitir que el tiempo medio supere los 35 minutos.

En el segundo apartado, el tiempo hasta que el medicamento hace efecto sigue $X \sim N(27,2, 5^2)$. «No hacer efecto hasta pasados 20 minutos» corresponde a $X > 20$:

$$P(X > 20) = 1 - \Phi\left(\frac{20 - 27,2}{5}\right) = 1 - \Phi(-1,44) = \Phi(1,44) \approx 0,9251.$$

$$IC_{98\%} \approx (23,3217, 30,6783) \text{ min}; \quad P(X > 20) \approx 0,9251.$$