

Julio 2019 · Convocatoria extraordinaria

Puedes elegir la opción A o la B. Para que puedas practicar todo el examen, aquí resolvemos las dos. En cada apartado explicamos la idea y después hacemos los cálculos paso a paso.

Opción A

A.1. Sistema con parámetro

El sistema es

$$\begin{cases} 2x + 3z = \alpha, \\ x - 2y + 2z = 5, \\ 3x - y + 5z = \alpha + 1. \end{cases}$$

La matriz de coeficientes y la matriz ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 3 & \alpha \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & \alpha + 1 \end{array} \right).$$

a) Valores de α para los que hay una única solución. Una matriz cuadrada tiene rango 3 cuando su determinante no es cero. Calculamos:

$$\begin{aligned} \det A &= 2 \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 2((-2) \cdot 5 - 2 \cdot (-1)) + 3(1 \cdot (-1) - (-2) \cdot 3) \\ &= 2(-10 + 2) + 3(-1 + 6) = -16 + 15 = -1 \neq 0. \end{aligned}$$

Por tanto, $\text{rg}(A) = 3$ para cualquier α . La matriz ampliada tiene tres filas y contiene a A , así que también $\text{rg}(A^*) = 3$. Como hay 3 incógnitas,

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3 = \text{número de incógnitas}.$$

Por Rouché-Frobenius, el sistema es compatible determinado (SCD) para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Para obtener la solución, despejamos x de la segunda ecuación:

$$x = 5 + 2y - 2z.$$

Lo sustituimos en la primera:

$$2(5 + 2y - 2z) + 3z = \alpha \implies 4y - z = \alpha - 10 \implies z = 4y - \alpha + 10.$$

Ahora lo sustituimos en la tercera:

$$\begin{aligned} 3(5 + 2y - 2z) - y + 5z &= \alpha + 1, \\ 15 + 5y - z &= \alpha + 1, \\ 5y - (4y - \alpha + 10) &= \alpha - 14, \\ y &= -4. \end{aligned}$$

Con $y = -4$, las otras dos coordenadas son

$$z = 4(-4) - \alpha + 10 = -\alpha - 6, \quad x = 5 + 2(-4) - 2(-\alpha - 6) = 2\alpha + 9.$$

Así, para cada valor real de α ,

$$(x, y, z) = (2\alpha + 9, -4, -\alpha - 6).$$

b) Solución cuando $\alpha = -1$. Sustituimos -1 en la solución general:

$$(x, y, z) = (2(-1) + 9, -4, -(-1) - 6) \implies (x, y, z) = (7, -4, -5).$$

c) Condición $x + y + z = 0$. Sumamos las coordenadas de la solución general:

$$x + y + z = (2\alpha + 9) - 4 + (-\alpha - 6) = \alpha - 1.$$

Imponemos la condición pedida:

$$\alpha - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = 1}.$$

Con ese valor, la solución es $(11, -4, -7)$, cuya suma es efectivamente cero.

A.2. Plano, distancia, área y volumen

Escribimos el plano en forma general y anotamos el punto:

$$\pi : 2x + y + 2z - 8 = 0, P = (10, 0, 10).$$

a) Distancia de P al plano. Para un plano $ax + by + cz + d = 0$, la distancia desde (x_0, y_0, z_0) es

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Aquí el vector normal es $(2, 1, 2)$. Sustituimos el punto y los coeficientes del plano:

$$d(P, \pi) = \frac{|2 \cdot 10 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 10 - 8|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{32}{3}.$$

Por tanto, $d(P, \pi) = \frac{32}{3}$ unidades de longitud.

b) Área del triángulo de intersección con los ejes. En cada eje se anulan las otras dos coordenadas:

$$\text{Eje } x : y = z = 0 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow A = (4, 0, 0),$$

$$\text{Eje } y : x = z = 0 \Rightarrow y = 8 \Rightarrow B = (0, 8, 0),$$

$$\text{Eje } z : x = y = 0 \Rightarrow 2z = 8 \Rightarrow C = (0, 0, 4).$$

El área de un triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial de dos lados. Calculamos esos lados desde A :

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-4, 8, 0), \quad \overrightarrow{AC} = C - A = (-4, 0, 4).$$

Entonces

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -4 & 8 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (32, 16, 32),$$

y

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{32^2 + 16^2 + 32^2} = 48.$$

Por tanto,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 48 = 24 \text{ unidades cuadradas}.$$

c) Volumen del tetraedro $PABC$. El volumen de un tetraedro es un sexto del valor absoluto del determinante formado por tres aristas que salen del mismo vértice. Desde A :

$$\overrightarrow{AB} = (-4, 8, 0), \quad \overrightarrow{AC} = (-4, 0, 4), \quad \overrightarrow{AP} = P - A = (6, 0, 10).$$

Así,

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{6} \left| \det \begin{pmatrix} -4 & 8 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 10 \end{pmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{6} |\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AP})| = \frac{512}{6} = \boxed{\frac{256}{3} \text{ unidades cúbicas}}. \end{aligned}$$

A.3. Función racional, límites, asíntota e integral

$$h(x) = \frac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^2 + 2x + 5}.$$

a) **Dominio y límites en los extremos.** El denominador se puede escribir como una suma que siempre es positiva:

$$x^2 + 2x + 5 = (x + 1)^2 + 4 \geq 4 > 0.$$

Por eso nunca se anula y no excluye ningún número real: $D_h = \mathbb{R}$.

Dividimos el numerador por el denominador:

$$x^3 + x^2 + 5x - 3 = (x - 1)(x^2 + 2x + 5) + (2x + 2),$$

de modo que

$$h(x) = x - 1 + \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 5}.$$

El último cociente tiende a cero cuando $x \rightarrow +\infty$ y cuando $x \rightarrow -\infty$. Así,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty.$$

b) **Asíntotas.** Comprobamos los tres tipos:

- **Verticales:** no hay, porque el denominador $(x + 1)^2 + 4$ nunca vale cero. - **Horizontales:** no hay, porque los límites de $h(x)$ en los dos extremos son infinitos, no finitos. - **Oblicua:** la división anterior deja un resto cuyo cociente tiende a cero. En concreto,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (h(x) - (x - 1)) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 5} = 0.$$

Por tanto, la asíntota oblicua en ambos extremos es

$$y = x - 1.$$

c) **Primitiva y área entre $x = 1$, $x = 5$, el eje x y la curva.** Usamos la descomposición de la función y la sustitución $u = x^2 + 2x + 5$, cuya derivada es $du = (2x + 2) dx$:

$$\begin{aligned} \int h(x) dx &= \int (x - 1) dx + \int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 5} dx \\ &= \frac{x^2}{2} - x + \int \frac{du}{u} \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(x^2 + 2x + 5) + C \right]. \end{aligned}$$

Para calcular el área, comprobamos primero que la función está por encima del eje en todo $[1, 5]$. El denominador es positivo y el numerador $N(x) = x^3 + x^2 + 5x - 3$ cumple

$$N'(x) = 3x^2 + 2x + 5 > 0 \quad (1 \leq x \leq 5), \quad N(1) = 4 > 0.$$

Luego $h(x) > 0$ en ese intervalo y el área es la integral definida:

$$\begin{aligned} S &= \int_1^5 h(x) dx = \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(x^2 + 2x + 5) \right]_1^5 \\ &= \left(\frac{25}{2} - 5 + \ln 40 \right) - \left(\frac{1}{2} - 1 + \ln 8 \right) \\ &= \boxed{8 + \ln 5 \text{ unidades cuadradas}}. \end{aligned}$$

Opción B

B.1. Ecuación matricial y valores propios

Las matrices del enunciado son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

a) Valores de α para los que $AX = \alpha X$ solo tiene una solución. Pasamos todo al mismo lado:

$$AX = \alpha X \iff (A - \alpha I)X = 0, A - \alpha I = \begin{pmatrix} 1-\alpha & 4 \\ -1 & 6-\alpha \end{pmatrix}.$$

Un sistema homogéneo cuadrado tiene solo la solución nula cuando el determinante de su matriz es distinto de cero. Calculamos:

$$\begin{aligned} \det(A - \alpha I) &= (1 - \alpha)(6 - \alpha) - 4(-1) \\ &= \alpha^2 - 7\alpha + 10 = (\alpha - 2)(\alpha - 5). \end{aligned}$$

Si $\alpha \neq 2, 5$, el determinante no se anula y la única solución es $X = (0, 0)^T$.

Revisamos los dos casos en que el determinante vale cero:

$$\begin{aligned} \alpha = 2: \quad & \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} X = 0 \implies x = 4y \implies X = t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}; \\ \alpha = 5: \quad & \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X = 0 \implies x = y \implies X = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En ambos casos hay soluciones no nulas, así que la respuesta es

$$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{2, 5\}.$$

b) Todas las soluciones de $AX = 5X$. Usamos el sistema del caso $\alpha = 5$:

$$-4x + 4y = 0, -x + y = 0 \implies x = y.$$

Por tanto, todas las soluciones son

$$X = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

c) Valor de β . Verificamos primero el vector dado:

$$A \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + 4 \cdot 1 \\ -1 \cdot 4 + 6 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Así, ese vector es propio con valor propio 2. Al volver a aplicar A , cada aplicación lo multiplica por 2; por inducción,

$$A^n \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Para $n = 100$, se obtiene

$$A^{100} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2^{100} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = 2^{100}.$$

B.2. Posición relativa de una recta y un plano

La recta del enunciado se escribe exclusivamente en forma paramétrica tomando como parámetro el valor común t :

$$r: x = \alpha - t, y = -4t, z = \beta t, t \in \mathbb{R}.$$

El plano, en forma general, es $\pi: x + 2y + 3z - 6 = 0$. Sustituimos en su ecuación:

$$(\alpha - t) + 2(-4t) + 3\beta t - 6 = 0 \iff \alpha - 6 + 3(\beta - 3)t = 0.$$

Estudiamos los casos:

- Si $\beta \neq 3$, el coeficiente de t no es cero y hay una única solución $t = \frac{6-\alpha}{3(\beta-3)}$. La recta y el plano se cortan en un punto: son **secantes**. - Si $\beta = 3$, la ecuación queda $\alpha - 6 = 0$. Cuando $\alpha = 6$ se cumple para todo t , por lo que la recta está **contenida** en el plano. Cuando $\alpha \neq 6$ no hay ningún punto común: son **paralelos exteriores**.

b) Distancia para $\alpha = 6, \beta = 3$. En este caso la recta está contenida en el plano, así que

$$d(r, \pi) = 0.$$

c) Plano que pasa por el origen y no corta a π . Para que dos planos distintos no se corten, deben ser paralelos y tener el mismo vector normal $(1, 2, 3)$. Escribimos el plano buscado como

$$\sigma : x + 2y + 3z + d = 0.$$

Al imponer que pase por $(0, 0, 0)$, resulta

$$0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + d = 0 \implies d = 0.$$

Como σ no coincide con π , no se cortan. El plano pedido es

$$\sigma : x + 2y + 3z = 0.$$

B.3. Distancia del proyectil y área barrida por la cuerda

Un punto de la parábola es $Q(x) = (x, 4 - x^2)$, y el punto fijo es $P = (0, 2)$. La abscisa del proyectil pertenece a $[-2, 2]$.

a) Función distancia. Aplicamos la fórmula de distancia entre dos puntos:

$$\begin{aligned} d(x) &= \sqrt{(x-0)^2 + ((4-x^2)-2)^2} \\ &= \sqrt{x^2 + (2-x^2)^2} \\ &= \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}, \quad -2 \leq x \leq 2. \end{aligned}$$

b) Puntos de máxima distancia y c) puntos de mínima distancia. La distancia es siempre positiva porque

$$d(x)^2 = x^4 - 3x^2 + 4 = \left(x^2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0.$$

Por ello podemos derivarla; el denominador de $d'(x)$ será positivo y su signo dependerá del numerador:

$$d'(x) = \frac{4x^3 - 6x}{2\sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}} = \frac{x(2x^2 - 3)}{d(x)}.$$

Igualemos la derivada a cero:

$$x(2x^2 - 3) = 0 \implies x = 0 \text{ o } x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Comprobamos el signo de d' en cada intervalo usando un valor de prueba:

Intervalo o punto	Valor de prueba	Valor de (d')	Signo	Comportamiento
$[-2, -\sqrt{3/2})$	$x = -2$	$-5/\sqrt{2}$	-	Decrece
$x = -\sqrt{3/2}$		0	0	Mínimo relativo
$(-\sqrt{3/2}, 0)$	$x = -1$	$1/\sqrt{2}$	+	Crece
$x = 0$		0	0	Máximo relativo
$(0, \sqrt{3/2})$	$x = 1$	$-1/\sqrt{2}$	-	Decrece
$x = \sqrt{3/2}$		0	0	Mínimo relativo
$(\sqrt{3/2}, 2]$	$x = 2$	$5/\sqrt{2}$	+	Crece

Para identificar los extremos absolutos del intervalo cerrado, comparamos los valores en los puntos críticos y en los extremos:

$$d(-2) = d(2) = 2\sqrt{2}, \quad d(0) = 2, \quad d\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Así, la distancia máxima se da en los extremos de la parábola:

$$Q(-2) = (-2, 0), Q(2) = (2, 0), d_{\max} = 2\sqrt{2}.$$

La distancia mínima se da en las dos abscisas $x = \pm\sqrt{3/2}$. En ellas $y = 4 - 3/2 = 5/2$, por lo que

$$Q = \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2}\right), Q = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{5}{2}\right), d_{\min} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

d) Área recorrida por la cuerda. La otra curva del enunciado es $y = 2 - |x|$. Las dos curvas son simétricas respecto del eje y . En $[-2, 2]$, la diferencia entre la parábola y la gráfica en forma de V es

$$(4 - x^2) - (2 - |x|) = 2 - x^2 + |x| = (2 - |x|)(1 + |x|) \geq 0.$$

Por tanto, la parábola queda arriba y la curva $y = 2 - |x|$ abajo; se encuentran en $x = -2$ y $x = 2$. Por simetría, calculamos el área a la derecha del eje y y la duplicamos:

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^2 ((4 - x^2) - (2 - x)) dx \\ &= 2 \int_0^2 (2 - x^2 + x) dx \\ &= 2 \left[2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^2 \\ &= 2 \left(4 - \frac{8}{3} + 2 \right) = \frac{20}{3} \text{ unidades cuadradas.} \end{aligned}$$

Representación de la región entre las curvas:

