

PAU Madrid - Matemáticas II

Convocatoria extraordinaria 2021-2022

El examen permite escoger cuatro preguntas entre ocho. Se resuelven todas para repasar el temario completo.

A.1. Sistema de ecuaciones: libros de una biblioteca

Llamamos E , N y B al número de ensayos, novelas y biografías, respectivamente, y T al total. Traducimos los datos a ecuaciones:

$$E = \frac{3}{16}T, \quad B + \frac{E}{3} = N + 2, \quad T - \frac{E}{2} - \frac{N}{5} = 105.$$

De la primera relación, $T = \frac{16}{3}E$. Como $T = E + N + B$, resulta $N + B = \frac{13}{3}E$. Además, la segunda ecuación equivale a $B - N = 2 - \frac{E}{3}$. Sumando y restando estas relaciones:

$$2B = \frac{13}{3}E + 2 - \frac{E}{3} = 4E + 2 \implies B = 2E + 1, \quad 2N = \frac{13}{3}E - 2 + \frac{E}{3} = \frac{14}{3}E - 2 \implies N = \frac{7}{3}E - 1.$$

Sustituimos en la condición sobre los libros que quedarían:

$$\frac{16}{3}E - \frac{E}{2} - \frac{1}{5}\left(\frac{7}{3}E - 1\right) = 105 \implies \frac{131}{30}E + \frac{1}{5} = 105 \implies E = 24.$$

Así, $B = 49$, $N = 55$ y $T = 24 + 49 + 55 = 128$. **Conclusión.** En la estantería hay 24 ensayos, 55 novelas y 49 biografías.

A.2. Función definida a trozos

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{x}, & x < 0, \\ x^2 - 4x + 3, & x \geq 0. \end{cases}$$

El dominio es $\mathbb{R}$: la expresión racional solo se usa para $x < 0$, donde el denominador no se anula, y para $x \geq 0$ se usa un polinomio.

a) Continuidad

Cada expresión es continua en su intervalo; solo hay que comprobar el punto de cambio, $x = 0$. Por la izquierda,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(2 + \frac{1}{x} \right) = -\infty,$$

mientras que $f(0) = 3$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3$. Los límites laterales no coinciden y el límite por la izquierda es infinito. **Conclusión.** f no es continua en $x = 0$; allí tiene una discontinuidad infinita. Es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) Derivabilidad en $x = 0$

La derivabilidad en un punto implica continuidad en ese punto. Como f no es continua en 0, tampoco puede ser derivable allí. **Conclusión.** f no es derivable en $x = 0$.

c) Asíntotas verticales y horizontales

Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$, $x = 0$ es una asíntota vertical. Para las horizontales estudiamos los dos extremos:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 + \frac{1}{x} \right) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 4x + 3) = +\infty.$$

En $+\infty$ tampoco puede haber asíntota oblicua, pues $f(x)/x = x - 4 + 3/x \rightarrow +\infty$ y la pendiente tendría que ser finita. **Conclusión.** Las asíntotas son $x = 0$ (vertical) e $y = 2$ (horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$).

d) Tangente horizontal y extremo relativo para $x > 0$

En el intervalo positivo, $f'(x) = 2x - 4$. La pendiente de la tangente es cero cuando

$$2x - 4 = 0 \implies x = 2, \quad f(2) = -1.$$

La recta horizontal que pasa por $(2, -1)$ es $y = -1$. Además, $f'(x) < 0$ en $(0, 2)$ y $f'(x) > 0$ en $(2, +\infty)$, por lo que la función pasa de decrecer a crecer. **Conclusión.** La tangente horizontal aparece en $(2, -1)$ y su ecuación es $y = -1$; el punto es un mínimo relativo.

A.3. Cuadrados en el plano $z = x$

El plano π viene dado por $z = x$, de modo que en todo vector paralelo a él las componentes primera y tercera coinciden. Los puntos dados son $A = (0, -1, 0)$ y $B = (0, 1, 0)$.

a) A y B son vértices contiguos

El lado conocido es

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0 - 0, 1 - (-1), 0 - 0) = (0, 2, 0), \quad |AB| = 2.$$

El otro lado debe ser perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ y estar en el plano, así que tiene forma $(a, 0, a)$. Su longitud también es 2:

$$\sqrt{a^2 + a^2} = 2 \implies a = \pm\sqrt{2}.$$

Si $C = B + \vec{v}$ y $D = A + \vec{v}$, se obtienen las dos posibilidades:

	C	D
$\vec{v} = (\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, 1, \sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, -1, \sqrt{2})$
$\vec{v} = (-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}, 1, -\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}, -1, -\sqrt{2})$

Conclusión. Los dos pares posibles de vértices restantes son los indicados en la tabla.

b) A y B son vértices opuestos

El centro del cuadrado es el punto medio de la diagonal:

$$O = \frac{A + B}{2} = (0, 0, 0).$$

Las diagonales de un cuadrado son perpendiculares, tienen la misma longitud y se cortan en el punto medio. La otra diagonal debe estar en el plano y ser perpendicular a $\overrightarrow{AB}$; una dirección válida es $(1, 0, 1)$. Cada semidiagonal mide 1, por lo que sus extremos son

$$O \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Conclusión. Los otros vértices son $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

A.4. Modelo binomial y aproximación normal

Sea X el número de alumnos matriculados en Matemáticas II entre los seis elegidos. Cada alumno está matriculado con probabilidad $p = 3/5 = 0,6$, por lo que $q = 1 - p = 0,4$ y

$$X \sim \text{Bin}(6, 0,6).$$

a) Exactamente cuatro alumnos

En una binomial, la probabilidad de obtener k éxitos en n ensayos es $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$. Sustituyendo:

$$P(X = 4) = \binom{6}{4} (0,6)^4 (0,4)^2 = 15 \cdot 0,1296 \cdot 0,16 = 0,31104 = \frac{972}{3125}.$$

Conclusión. La probabilidad de que exactamente cuatro estén matriculados es 0,31104.

b) Al menos uno

Para simplificar, calculamos el complementario, que ninguno esté matriculado. Por independencia, las seis probabilidades de no estar matriculado se multiplican:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (0,4)^6 = \frac{15561}{15625} = 0,995904.$$

Conclusión. La probabilidad de que alguno esté matriculado es 0,995904.

c) Más de 60 entre 120 alumnos

Ahora $X \sim \text{Bin}(120, 0,6)$. La aproximamos con una normal de igual media y varianza:

$$\mu = np = 72, \quad \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{120 \cdot 0,6 \cdot 0,4} = \sqrt{28,8}.$$

"Más de 60" significa $X \geq 61$. Con la corrección de continuidad, usamos $P(Y > 60,5)$, donde $Y \sim N(72, \sqrt{28,8})$. Estandarizamos:

$$P(Y > 60,5) = P\left(Z > \frac{60,5 - 72}{\sqrt{28,8}}\right) = P(Z > -2,1429) = P(Z < 2,1429) \approx P(Z < 2,14) = 0,9838.$$

La penúltima igualdad se debe a la simetría de la normal estándar y el último valor se lee en la tabla. **Conclusión.** La probabilidad aproximada es 0,9838.

B.1. Producto de matrices, inversa y rango

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Invertibilidad de AB e inversa para $k = 1$

Multiplicamos filas de A por columnas de B :

$$AB = \begin{pmatrix} k & 2 \\ k & k-1 \end{pmatrix}, \quad \det(AB) = k(k-1) - 2k = k(k-3).$$

Una matriz cuadrada es invertible si su determinante no es cero; por tanto, AB tiene inversa para $k \neq 0, 3$. Para $k = 1$,

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det(AB) = -2.$$

Aplicamos la fórmula de la inversa de orden dos:

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Conclusión. AB es invertible si $k \notin \{0, 3\}$; para $k = 1$, su inversa es la matriz anterior.

b) Matriz BA y su rango

Multiplicando las filas de B por A :

$$BA = \begin{pmatrix} k+1 & 0 & k-1 \\ 1-k & -2 & k+1 \\ 1 & -1 & k \end{pmatrix}.$$

La matriz B tiene rango 2, igual a su número de columnas, por lo que su aplicación es inyectiva y $\text{rg}(BA) = \text{rg}(A)$. La matriz A tiene rango 2 para todo k : el menor de las dos primeras columnas vale $k+1$, no nulo si $k \neq -1$. Para $k = -1$, el menor de las columnas segunda y tercera es

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Así, el rango de A es siempre 2. **Conclusión.** $\text{rg}(BA) = 2$ para todo $k \in \mathbb{R}$.

c) Sistema incompatible cuando $k = 1$

Para $k = 1$,

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tomamos como términos independientes $(0, 0, 1)^T$. El sistema es

$$\begin{cases} 2x = 0, \\ -2y + 2z = 0, \\ x - y + z = 1. \end{cases}$$

Las dos primeras ecuaciones dan $x = 0$ y $z = y$. Al introducir esos valores en la tercera se obtiene $0 = 1$, contradicción. **Conclusión.** El sistema escrito es incompatible y su matriz de coeficientes es BA para $k = 1$.

B.2. Función definida a trozos

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ x \ln x, & x > 0. \end{cases}$$

El dominio es $\mathbb{R}$: la primera rama cubre $x \leq 0$ y el logaritmo de la otra rama tiene argumento positivo.

a) Continuidad y derivabilidad en $x = 0$

Por la izquierda, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 = f(0)$. Por la derecha,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0,$$

donde aplicamos L'Hôpital a una indeterminación de tipo $-\infty/\infty$. Como ambos límites coinciden con el valor de la función, f es continua en 0.

Para la derivabilidad comparamos las derivadas laterales. A la izquierda, $f'_-(0) = 1$. A la derecha, el cociente incremental es

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h \ln h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \ln h = -\infty.$$

La derivada derecha no es finita, así que la función no es derivable en el punto. **Conclusión.** f es continua, pero no derivable, en $x = 0$.

b) Crecimiento, decrecimiento y extremos relativos

El signo de la derivada determina el crecimiento. Para $x < 0$, $f'(x) = 1 > 0$. Para $x > 0$,

$$f'(x) = \ln x + 1, \quad f'(x) = 0 \iff x = e^{-1}.$$

La derivada es negativa en $(0, e^{-1})$ y positiva en $(e^{-1}, +\infty)$. Separamos también en 0, donde cambia la expresión: la función crece en $(-\infty, 0]$, decrece en $[0, e^{-1}]$ y vuelve a crecer en $[e^{-1}, +\infty)$.

$$f(0) = 0, \quad f(e^{-1}) = e^{-1} \ln(e^{-1}) = -\frac{1}{e}.$$

Los valores a ambos lados de 0 son menores que 0 en un entorno, así que $x = 0$ es máximo relativo. En $x = e^{-1}$ la derivada cambia de negativa a positiva, luego hay un mínimo relativo. **Conclusión.** Máximo relativo en $(0, 0)$ y mínimo relativo en $(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e})$.

c) Integral definida

En $[1, 2]$ se tiene $f(x) = x \ln x$. Integraremos por partes, con $u = \ln x$, $dv = x dx$, $du = dx/x$ y $v = x^2/2$:

$$\int_1^2 x \ln x dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right]_1^2.$$

Al evaluar en los extremos:

$$(2 \ln 2 - 1) - \left(-\frac{1}{4} \right) = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}.$$

Conclusión. $\int_1^2 f(x) dx = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}.$

B.3. Rectas y planos en el espacio

a) Posición relativa y distancia

Parametrizamos r tomando $z = t$. De las ecuaciones se obtiene $y = -1 + 2t$ y $x = -1 - 2t$. La recta s ya está en forma paramétrica (usamos u para diferenciar parámetros):

$$r: \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = t \end{cases}, \quad s: \begin{cases} x = 2 - 2u \\ y = 5 + 2u \\ z = u \end{cases}.$$

Ambas tienen vector director $\vec{v} = (-2, 2, 1)$. Tomamos $R = (-1, -1, 0) \in r$ y $S = (2, 5, 0) \in s$; el vector que los une es

$$\overrightarrow{RS} = S - R = (2 - (-1), 5 - (-1), 0 - 0) = (3, 6, 0).$$

No es proporcional al vector director, así que las rectas son paralelas y distintas. La distancia entre rectas paralelas es la distancia de un punto de una a la otra, que calculamos con

$$d(r, s) = \frac{\|\overrightarrow{RS} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}.$$

El producto vectorial da el área del paralelogramo formado por $\overrightarrow{RS}$ y $\vec{v}$; al dividir por la longitud de la base $\vec{v}$ obtenemos la altura, que es la distancia entre las rectas. Como $\overrightarrow{RS} \times \vec{v} = (-6, 3, -18)$, su módulo es $3\sqrt{41}$, mientras que $\|\vec{v}\| = 3$. Por tanto,

$$d(r, s) = \frac{3\sqrt{41}}{3} = \sqrt{41}.$$

Conclusión. Las rectas son paralelas distintas y están separadas una distancia $\sqrt{41}$.

b) Plano que contiene a las dos rectas

El plano contiene los vectores $\vec{v}$ y $\overrightarrow{RS}$. Su producto vectorial es perpendicular a ambos y, por tanto, proporciona un vector normal al plano:

$$\vec{n} = \vec{v} \times \overrightarrow{RS} = (-6, 3, -18) \sim (2, -1, 6).$$

Usamos este normal y el punto $R = (-1, -1, 0)$ en la ecuación punto-normal:

$$2(x + 1) - (y + 1) + 6z = 0.$$

Conclusión. Una ecuación general del plano es $2x - y + 6z + 1 = 0$.

c) Recta que pasa por P y Q

Al imponer $z = 0$ en cada parametrización, el parámetro vale 0, así que $P = (-1, -1, 0)$ y $Q = (2, 5, 0)$. El vector director de la recta que los une es

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (2 - (-1), 5 - (-1), 0 - 0) = (3, 6, 0),$$

que podemos simplificar a $(1, 2, 0)$. En forma paramétrica:

$$\ell: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

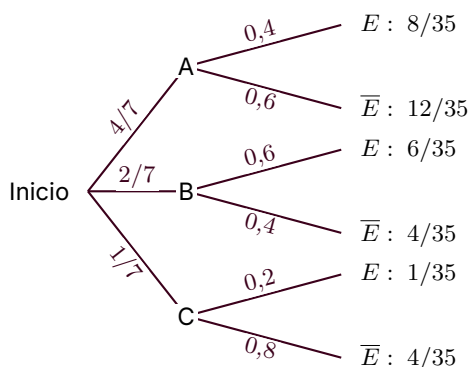
Conclusión. La recta pedida es ℓ , expresada en forma paramétrica.

B.4. Probabilidad total y probabilidad condicionada

Sean A , B y C los sucesos "el producto es de tipo A, B y C", respectivamente, y E el suceso "el producto se exporta". Las proporciones son

$$P(A) = \frac{4}{7}, \quad P(B) = \frac{2}{7}, \quad P(C) = 1 - \frac{4}{7} - \frac{2}{7} = \frac{1}{7}.$$

Las probabilidades de exportar según el tipo son $P(E | A) = 0,4$, $P(E | B) = 0,6$ y $P(E | C) = 0,2$. Multiplicamos las probabilidades sucesivas de cada camino para obtener su probabilidad conjunta:



a) Probabilidad de exportación

Los caminos que terminan en E son incompatibles entre sí, por lo que sumamos sus probabilidades conjuntas:

$$P(E) = P(A \cap E) + P(B \cap E) + P(C \cap E) = \frac{8}{35} + \frac{6}{35} + \frac{1}{35} = \frac{15}{35} = \frac{3}{7}.$$

Conclusión. La probabilidad de exportación es $\frac{3}{7}$.

b) Probabilidad de que sea C sabiendo que se exporta

Al conocer que ha ocurrido E , usamos la probabilidad condicionada: restringimos el total a los productos exportados.

$$P(C | E) = \frac{P(C \cap E)}{P(E)} = \frac{1/35}{3/7} = \frac{1}{15}.$$

Conclusión. La probabilidad de que el producto sea de tipo C, dado que se exporta, es $\frac{1}{15}$.