Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

Curso 2017--2018 · Enunciado v2

Soluciones originales, desarrolladas a partir del enunciado.

Opción A

Ejercicio 1 · Programación lineal

Sean x e y los números de collares de tipo A y B. Las disponibilidades de perlas blancas y grises y el mínimo de perlas negras dan las restricciones

$$20x + 10y \le 900, \qquad 20x + 20y \le 1400, \qquad 30x + 60y \ge 1800,$$

es decir,

$$2x + y \le 90, \qquad x + y \le 70, \qquad x + 2y \ge 60, \qquad x, y \ge 0.$$

Queremos maximizar el beneficio $B(x, y) = 600x + 500y$. Los vértices del recinto factible se obtienen al intersectar las rectas frontera con los ejes o entre sí. Sobre el eje y, la región va de $y = 30$ a $y = 70$, lo que da $(0, 30)$ y $(0, 70)$. Las dos restricciones de máximo se cortan en

$$\begin{cases} 2x + y = 90, \\ x + y = 70 \end{cases} \Longrightarrow x = 20, \quad y = 50.$$

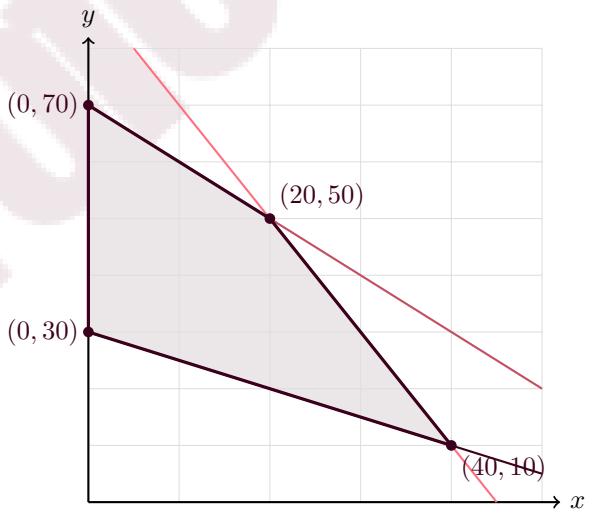
La recta $2x + y = 90$ y el mínimo de negras se cortan en

$$\begin{cases} 2x + y = 90, \\ x + 2y = 60 \end{cases} \Longrightarrow x = 40, \quad y = 10.$$

Los cuatro vértices son, por tanto, $(0, 30)$, $(0, 70)$, $(20, 50)$ y $(40, 10)$. Evaluamos el beneficio en cada uno:

$$B(0, 30) = 15\,000, \quad B(0, 70) = 35\,000, \quad B(20, 50) = 37\,000, \quad B(40, 10) = 29\,000.$$

El máximo se alcanza fabricando 20 collares A y 50 collares B. Para comprobar la propuesta $(40, 20)$, revisamos las restricciones: consume $20 \cdot 40 + 10 \cdot 20 = 1000$ perlas blancas, más de las 900 disponibles, por lo que no es posible.



$(x, y) = (20, 50)$, $B_{\text{máx}} = 37\,000$ euros; $(40, 20)$ no es factible.

Ejercicio 2 · Crecimiento y extremos absolutos

La cantidad producida no puede ser negativa y la capacidad máxima es de 2 toneladas, así que estudiamos $f(x) = 30 - 9x + 6x^2 - x^3$ en $[0, 2]$. El signo de la derivada indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento:

$$f'(x) = -9 + 12x - 3x^2 = -3(x - 1)(x - 3).$$

En $[0,1)$, $f'(x)<0$; en $(1,2]$, $f'(x)>0$. Por tanto, el coste decrece hasta $x=1$ y después crece. El mínimo se alcanza en el punto crítico $x=1$:

$$f(1)=30-9+6-1=26.$$

Para determinar el máximo absoluto en el intervalo cerrado también comparamos los extremos con ese mínimo:

$$f(0)=30, \qquad f(1)=26, \qquad f(2)=28.$$

Los costes están expresados en miles de euros. Así, el coste mínimo es $26\,000$ euros con una producción de una tonelada; el coste máximo permitido es $30\,000$ euros cuando no se produce ninguna tonelada.

$$\boxed{\text{Decrece en } [0,1], \quad \text{crece en } [1,2]; \quad f_{\text{min}}=26 \text{ en } x=1, \quad f_{\text{max}}=30 \text{ en } x=0.}$$

Ejercicio 3 · Probabilidad total y condicionada

El número de adultos mayores de 60 años es $520-220-208=92$. De los niños utilizan las duchas $220/5=44$; de los adultos menores, $0{,}75\cdot 208=156$; y de los mayores, 23. En total, se duchan $44+156+23=223$ usuarios.
a) Al elegir una persona al azar, cada usuario tiene la misma probabilidad de ser seleccionado:

$$P(\text{duchas})=\frac{223}{520}.$$

b) El suceso «adulto menor de 60 años y utiliza las duchas» corresponde a 156 usuarios:

$$P(\text{adulto menor y duchas})=\frac{156}{520}=\frac{3}{10}.$$

c) Sabiendo que utiliza las duchas, el grupo de referencia se reduce a esos 223 usuarios. De ellos, 44 son niños:

$$P(\text{niño} \mid \text{duchas})=\frac{44}{223}.$$

$$\boxed{P(\text{duchas})=\frac{223}{520}; \quad P(\text{adulto menor y duchas})=\frac{3}{10}; \quad P(\text{niño} \mid \text{duchas})=\frac{44}{223}.}$$

Ejercicio 4 · Intervalos y error de estimación de la media

Como la población es normal y se conoce $\sigma=6$ euros, el intervalo bilateral para la media tiene la forma

$$\bar{x}\pm z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

donde $\bar{x}$ es el centro del intervalo y el segundo término es su margen de error. **a)** El centro y el error del intervalo dado se obtienen con el punto medio y la semilongitud:

$$\bar{x}=\frac{24{,}47+26{,}43}{2}=25{,}45, \qquad E=\frac{26{,}43-24{,}47}{2}=0{,}98.$$

Con confianza del 95%, $z_{0{,}975}=1{,}96$. Igualamos el margen a la fórmula del error y despejamos el tamaño muestral:

$$0{,}98=1{,}96\frac{6}{\sqrt{n}} \Longrightarrow \sqrt{n}=12 \Longrightarrow n=144.$$

b) Para una nueva muestra de tamaño 49 y confianza del 97%, $z_{0{,}985}\approx 2{,}170$. El error máximo es

$$E=2{,}170\frac{6}{\sqrt{49}}=\frac{13{,}02}{7}\approx 1{,}86 \text{ euros}.$$

$$\boxed{\bar{x}=25{,}45 \text{ euros}, \quad n=144; \qquad E_{97\%}\approx 1{,}86 \text{ euros}.}$$

Opción B

Ejercicio 1 · Sistemas y ecuaciones matriciales

a) Llamamos $M = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. El sistema es $2A - 5B = M$ y $3A - B = N$. Eliminamos A: multiplicamos la primera ecuación por 3, la segunda por 2 y restamos la segunda de la primera:

$$-13B = 3M - 2N \quad \Longrightarrow \quad B = \frac{2N - 3M}{13} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -\frac{22}{13} \end{pmatrix}.$$

Con $3A - B = N$, obtenemos

$$A = \frac{N + B}{3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{3}{13} \end{pmatrix}.$$

Al sustituir estas matrices en las dos ecuaciones se recuperan M y N.

b) La ecuación $XC - D^2 = I_2$ se transforma en $XC = I_2 + D^2$. Primero calculamos

$$D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

pues $\det C = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1$. Multiplicamos por C^{-1} a la derecha para despejar X:

$$X = (I_2 + D^2)C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 14 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{3}{13} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -\frac{22}{13} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 14 \end{pmatrix}.}$$

Ejercicio 2 · Continuidad, derivabilidad y monotonía

La función está definida por tramos en $(-\infty, -1]$, $(-1, 0]$ y $(0, +\infty)$. Para continuidad y derivabilidad basta comparar las ramas en los puntos de unión $x = -1$ y $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} ax + 1, & x \le -1, \\ \dfrac{x}{x+2}, & -1 < x \le 0, \\ x^2 - bx, & x > 0. \end{cases}$$

En $x = -1$, la continuidad exige que el valor de la primera rama coincida con el límite de la segunda:

$$-a + 1 = \frac{-1}{-1 + 2} = -1 \quad \Longrightarrow \quad a = 2.$$

Las derivadas laterales son a y $\dfrac{2}{(x+2)^2}$; en $x = -1$ ambas valen 2, así que también se cumple la derivabilidad.

En $x = 0$, las dos ramas dan límite y valor 0, por lo que la función es continua para cualquier b. Para que sea derivable, igualamos las derivadas laterales:

$$\frac{2}{(x+2)^2}\bigg|_{x=0} = 1, \qquad (2x - b)\big|_{x=0} = -b \quad \Longrightarrow \quad b = -1.$$

Así, los parámetros son $a = 2$ y $b = -1$. Para estudiar su monotonía con esos valores, derivamos en cada tramo:

$$f'(x) = \begin{cases} 2, & x < -1, \\ \dfrac{2}{(x+2)^2}, & -1 < x < 0, \\ 2x + 1, & x > 0. \end{cases}$$

Las tres expresiones son positivas en sus respectivos intervalos. Como además la función es continua en los puntos de unión, es creciente en todo $\mathbb{R}$ y no tiene extremos relativos.

$$\boxed{a = 2, \quad b = -1; \qquad f \text{ es creciente en } \mathbb{R}.}$$

Ejercicio 3 · Probabilidad total, Bayes y unión

Sean A el suceso «la caja procede de la productora A» y P el suceso «la variedad es picual». Sabemos que $P(A) = 0{,}4$, $P(P \mid A) = 0{,}6$ y $P(P \mid A^c) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$. **a)** Sumamos las probabilidades de que una caja picual proceda de cada productora:

$$P(P) = P(A)P(P \mid A) + P(A^c)P(P \mid A^c) = 0{,}4 \cdot 0{,}6 + 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}66.$$

b) Aplicamos Bayes para invertir la condición:

$$P(A \mid P) = \frac{P(A)P(P \mid A)}{P(P)} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{0{,}66} = \frac{4}{11}.$$

c) Para la unión restamos la intersección, que se contaría dos veces al sumar $P(A)$ y $P(P)$:

$$P(A \cup P) = P(A) + P(P) - P(A \cap P) = 0{,}4 + 0{,}66 - 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}82.$$

$$\boxed{P(P) = 0{,}66; \qquad P(A \mid P) = \frac{4}{11}; \qquad P(A \cup P) = 0{,}82.}$$

Ejercicio 4 · Intervalo de confianza para una proporción

De los 250 accidentes, 90 se atribuyen a distracciones por móvil; así, $\widehat{p} = 90/250 = 0{,}36$ y $\widehat{q} = 0{,}64$. Para una proporción usamos el intervalo bilateral

$$\widehat{p} \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}\widehat{q}}{n}}.$$

a) Con confianza del 97%, $z_{0{,}985} \approx 2{,}170$. El error es

$$E = 2{,}170\sqrt{\frac{0{,}36 \cdot 0{,}64}{250}} \approx 0{,}0659,$$

y el intervalo de confianza queda

$$IC_{97\%}(p) = [0{,}36 - E,\ 0{,}36 + E] \approx [0{,}2941,\ 0{,}4259].$$

b) Para confianza del 99%, $z_{0{,}995} \approx 2{,}576$. Manteniendo la proporción muestral, imponemos un error máximo del 5%:

$$2{,}576\sqrt{\frac{0{,}36 \cdot 0{,}64}{n}} \le 0{,}05 \quad \Longrightarrow \quad n \ge \frac{2{,}576^2 \cdot 0{,}36 \cdot 0{,}64}{0{,}05^2} \approx 611{,}56.$$

El tamaño mínimo entero que cumple la condición es 612 accidentes.

$$\boxed{IC_{97\%}(p) \approx [0{,}2941, 0{,}4259]; \qquad n_{\text{mín}} = 612.}$$