

Se resuelven los seis problemas para ofrecer una propuesta completa.

Problema 1 · Reparto de alquileres

Sean x, y, z los alquileres de los locales primero, segundo y tercero. Su suma es 1650 €. La ganancia es lo que queda después de pagar a los propietarios: la agencia retiene el 5%, 10% y 20%, respectivamente. Además, $x = 2(y + z)$.

$$\begin{cases} x + y + z = 1650, \\ 0,05x + 0,10y + 0,20z = 132, \\ x = 2(y + z). \end{cases}$$

De la primera y la tercera ecuación, $y + z = 550$ y $x = 1100$. Sustituimos en la ecuación de la ganancia:

$$55 + 0,10y + 0,20z = 132 \implies y + 2z = 770.$$

Restando $y + z = 550$ se obtiene $z = 220$ y, por tanto, $y = 330$.

Primer local: 1100 €; segundo: 330 €; tercero: 220 €.

Problema 2 · Producción de cajas de miel

Sean x e y las cajas de tipo A y B. La disponibilidad diaria de cada miel impone

$$2x + y \leq 280, \quad 2x + 2y \leq 300, \quad x + 2y \leq 250, \quad x, y \geq 0.$$

El beneficio es $B(x, y) = 7x + 5y$. Como es lineal, basta comparar sus valores en los vértices factibles. El cruce de las dos primeras restricciones es $(130, 20)$; el de la segunda y tercera, $(50, 100)$. Los cortes factibles con los ejes son $(140, 0)$ y $(0, 125)$.

(x, y)	$(0, 0)$	$(140, 0)$	$(130, 20)$	$(50, 100)$	$(0, 125)$
$B(x, y)$	0	980	1010	850	625

El mayor beneficio se obtiene en $(130, 20)$, que respeta las tres disponibilidades.

Comercializar 130 cajas A y 20 cajas B; $B_{\max} = 1010$ € diarios.

Problema 3 · Estudio de una función racional

La función es

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{(x + 1)^2}.$$

a) El denominador solo se anula en $x = -1$, por lo que $\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Factorizando el numerador $(x + 2)(x - 1)$, los cortes con X son $(-2, 0)$ y $(1, 0)$. Además, $f(0) = -2$, así que el corte con Y es $(0, -2)$.

b) En $x = -1$ el numerador vale -2 y el denominador tiende a cero por valores positivos; por ello $f(x) \rightarrow +\infty$ por ambos lados, y $x = -1$ es asíntota vertical. Los grados son iguales, así que la asíntota horizontal es $y = 1$.

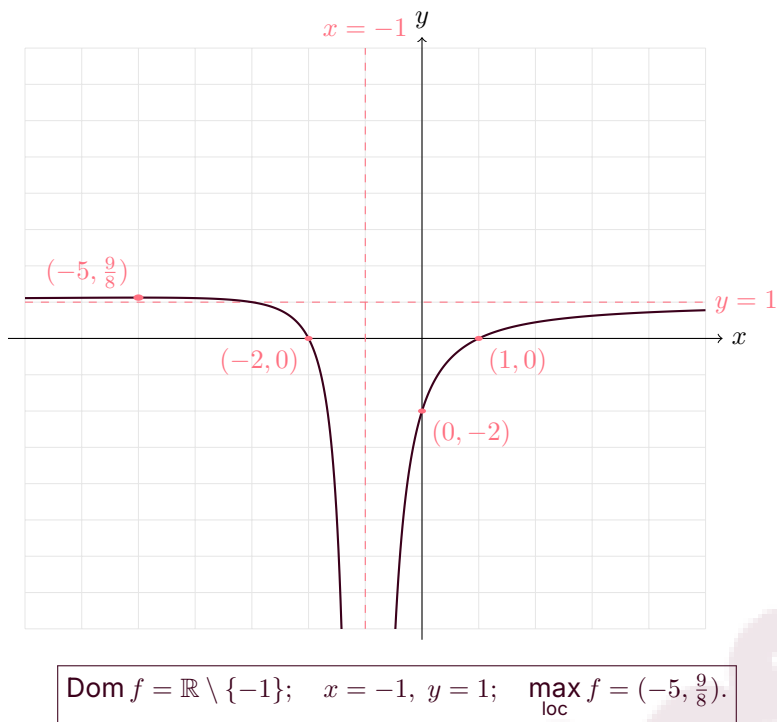
c) y d) Para conocer la monotonía, calculamos la derivada:

$$f'(x) = \frac{(2x + 1)(x + 1)^2 - 2(x + 1)(x^2 + x - 2)}{(x + 1)^4} = \frac{x + 5}{(x + 1)^3}.$$

Los valores que separan intervalos son $x = -5$ y el punto excluido $x = -1$. Probando el signo en cada intervalo, f' es positivo en $(-\infty, -5)$, negativo en $(-5, -1)$ y positivo en $(-1, +\infty)$. Así, hay un máximo local en $x = -5$ y no hay mínimo local. El valor del máximo es

$$f(-5) = \frac{25 - 5 - 2}{16} = \frac{9}{8}.$$

e) Representamos la curva con los cortes y las asíntotas obtenidos:



Problema 4 · Inversión en publicidad

El beneficio, en euros, es

$$B(x) = 50000 + 40x - \left(\frac{x}{10}\right)^2 = 50000 + 40x - \frac{x^2}{100}, \quad x \geq 0.$$

a) Para maximizarlo, buscamos el punto crítico y comprobamos el cambio de signo de la derivada:

$$B'(x) = 40 - \frac{x}{50} = 0 \implies x = 2000.$$

La derivada es positiva antes y negativa después, así que se trata de un máximo. El beneficio máximo es

$$B(2000) = 50000 + 40(2000) - \frac{2000^2}{100} = 90000 \text{ €}.$$

b) La derivada muestra que el beneficio crece en $[0, 2000]$ y decrece en $[2000, +\infty)$.

c) Sin invertir nada, el beneficio es $B(0) = 50000$ €. Para hallar cuándo queda por debajo de esa cantidad resolvemos

$$B(x) < B(0) \iff 40x - \frac{x^2}{100} < 0 \iff x(x - 4000) > 0.$$

Como $x \geq 0$, esto ocurre cuando $x > 4000$ €.

$$B_{\max} = 90000 \text{ € en } x = 2000 \text{ €}; \quad B \text{ crece hasta } 2000 \text{ y luego decrece}; \quad B(x) < B(0) \text{ si } x > 4000.$$

Problema 5 · Seguros y partes de accidente

Sean A el suceso «el cliente tiene más de 60 años» y B «no presentó parte de accidente». Las probabilidades por grupo de edad son

edad	< 30	30-60	> 60
$P(\text{edad})$	0,30	0,55	0,15
$P(B \mid \text{edad})$	0,75	0,90	0,40

Así, por probabilidad total,

$$P(B) = 0,30(0,75) + 0,55(0,90) + 0,15(0,40) = 0,78, \quad P(A \cap B) = 0,15(0,40) = 0,06.$$

a) Usamos la fórmula de la unión:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,15 + 0,78 - 0,06 = 0,87.$$

b) Sea C «tiene 30 años o más» y D «presentó parte». En esos grupos, las probabilidades de parte son 0,10 y 0,60:

$$P(C \cap D) = 0,55(0,10) + 0,15(0,60) = 0,145.$$

c) La probabilidad total de presentar parte es

$$P(D) = 0,30(0,25) + 0,55(0,10) + 0,15(0,60) = 0,22.$$

El suceso «parte y edad de 60 años o menos» tiene probabilidad $0,30(0,25) + 0,55(0,10) = 0,13$. Luego

$$P(\text{edad} \leq 60 \mid D) = \frac{0,13}{0,22} = \frac{13}{22}.$$

$$P(A \cup B) = 0,87; \quad P(C \cap D) = 0,145; \quad P(\text{edad} \leq 60 \mid D) = \frac{13}{22}.$$

Problema 6 · Lanzamiento de monedas y dado

Dos monedas equilibradas y un dado generan $4 \cdot 6 = 24$ resultados equiprobables. El jugador gana si salen dos caras y un número par, o exactamente una cara y un número al menos 5. Son casos incompatibles, por lo que sumamos sus probabilidades:

$$P(\text{ganar}) = P(2 \text{ caras})P(\text{par}) + P(1 \text{ cara})P(\geq 5) = \frac{1}{4} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{2}{6} = \frac{7}{24}.$$

b) De las combinaciones ganadoras, la primera categoría (dos caras y dado par) tiene probabilidad $1/8$. Por tanto,

$$P(2 \text{ caras} \mid \text{ganar}) = \frac{1/8}{7/24} = \frac{3}{7}.$$

c) Para obtener un cinco y ganar, debe salir exactamente una cara y el dado debe mostrar cinco. Así,

$$P(5 \mid \text{ganar}) = \frac{(1/2)(1/6)}{7/24} = \frac{2}{7}.$$

d) Sea A «no gana» y B «sale un seis». Para que salga seis y no gane, las monedas deben mostrar dos cruces:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} \frac{1}{6} = \frac{1}{24}, \quad P(A)P(B) = \frac{17}{24} \frac{1}{6} = \frac{17}{144}.$$

Como estos valores son distintos, A y B no son independientes.

$$P(\text{ganar}) = \frac{7}{24}; \quad P(2 \text{ caras} \mid \text{ganar}) = \frac{3}{7}; \quad P(5 \mid \text{ganar}) = \frac{2}{7}; \quad A, B \text{ no son independientes.}$$