

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

Julio de 2025 · Convocatoria extraordinaria de reserva

Se desarrollan los seis problemas de las dos opciones.

Problema 1 · Operaciones con matrices y beneficio

A) Primero calculamos el producto que aparece en la definición de M :

$$AB^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad AB^t C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad M = AB^t C - D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como $\det M = -3 \neq 0$, es invertible y

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Además, $M^2 = 3I$, de donde $M^8 = (M^2)^4 = 3^4 I = 81I$. Para las matrices del apartado d), $CC^t = 5$ es un escalar no nulo y, por tanto, invertible; en cambio

$$C^t C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \det(C^t C) = 0,$$

así que no es invertible. Para resolver la última ecuación, aislamos X a la derecha. Si $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, queda $XE^t = (C^t B)^t - A^t$, y resulta

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}; \quad M^2 = 3I; \quad M^8 = 81I; \quad X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

B) Sean x e y las entradas preferentes y estándar. El beneficio unitario es $115 - 5 = 110$ € en las preferentes y 90 € en las estándar. Las restricciones son

$$20x + 10y \leq 1000, \quad x + y \leq 75, \quad x, y \geq 0.$$

Evaluamos $G = 110x + 90y$ en los vértices $(0, 0)$, $(50, 0)$, $(25, 50)$ y $(0, 75)$. Se obtienen 0, 5500, 7250 y 6750 euros; el máximo está en $(25, 50)$.

$$25 \text{ entradas preferentes y } 50 \text{ estándar; } G_{\max} = 7250 \text{ €}.$$

Problema 2 · Riego y producción

A) La función de consumo de agua es

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 4x^2 + 10, & 0 \leq x \leq 8, \\ 3x + 9, & 8 < x \leq 20, \\ 70, & 20 < x \leq 30. \end{cases}$$

En $x = 8$, el valor es 266 y el límite por la derecha es 33: hay un salto. En $x = 20$, el valor es 69 y el límite por la derecha es 70, por lo que también hay un salto. Es continua dentro de cada tramo.

En el primer tramo, $f'(x) = 3x^2 - 8x = x(3x - 8)$. Decrece hasta $x = 8/3$ y crece desde ahí hasta 8. El punto crítico da

$$f\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{14}{27}.$$

El segundo tramo crece de 33 a 69 y el tercero es constante e igual a 70. Comparando también el extremo $x = 8$, el máximo absoluto es $f(8) = 266$ y el mínimo absoluto es $14/27$ en $x = 8/3$. La función es positiva entre los días 3 y 7, pues crece allí y $f(3) = 1$. Por tanto, el área es

$$\int_3^7 (x^3 - 4x^2 + 10) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + 10x \right]_3^7 = \frac{596}{3}.$$

$$\text{Discontinuidades en 8 y 20; } \min f = \frac{14}{27}; \quad \max f = 266; \quad A = \frac{596}{3}.$$

B) Para que la producción tenga un máximo interior en $x = 21$, la derivada debe anularse allí. Con $Q(x) = 30x^2 + Ax + B - x^3$:

$$Q'(x) = 60x + A - 3x^2, \quad Q'(21) = 0 \implies A = 63.$$

La condición $Q(21) = 5300$ da $B = 8$. La derivada se factoriza como $Q'(x) = -3(x - 21)(x + 1)$; en $10 \leq x < 21$ es positiva y en $21 < x \leq 30$ negativa. Para comprobar si alguna producción es menor que 1000 kg, basta comparar el mínimo en los extremos del intervalo: $Q(10) = 2638$ y $Q(30) = 1898$. Ambos superan 1000.

$$A = 63, \quad B = 8; \quad Q \text{ crece en } [10, 21] \text{ y decrece en } [21, 30]; \quad Q(x) > 1000 \text{ en todo el intervalo.}$$

Problema 3 · Elección de regalos

Las elecciones de las dos tiendas son independientes. La probabilidad de que ambos regalos sean del mismo tipo es

$$P(\text{mismo}) = 0,40 \cdot 0,20 + 0,15 \cdot 0,10 + 0,45 \cdot 0,70 = 0,41.$$

Por complemento, la probabilidad de que sean distintos es $1 - 0,41 = 0,59$. La probabilidad de que al menos uno de los dos regalos sea un libro o un juego es el complemento de que ambos sean ropa:

$$P(\text{libro o juego}) = 1 - 0,15 \cdot 0,10 = 0,985.$$

Si uno es ropa y el otro no, las probabilidades de que la ropa proceda de A o de B son $0,15(0,20 + 0,70) = 0,135$ y $0,10(0,40 + 0,45) = 0,085$. Condicionando a que se da una de esas dos situaciones:

$$P(\text{ropa de A} \mid \text{solo uno es ropa}) = \frac{0,135}{0,135 + 0,085} = \frac{27}{44}.$$

$$P(\text{distintos}) = 0,59; \quad P(\text{libro o juego}) = 0,985; \quad P(\text{ropa de A} \mid \text{condición}) = \frac{27}{44}.$$