

EJERCICIO A

PROBLEMA 1. Se están preparando dosis con dos tipos de complementos para los astronautas de la nave *Enterprise*. Cada gramo del complemento A contiene 2 unidades de riboflavina, 3 de hierro y 2 de carbohidratos. Cada gramo del complemento B contiene 2 unidades de riboflavina, 1 de hierro y 4 de carbohidratos. ¿Cuántos gramos de cada complemento son necesarios para producir exactamente una dosis con 12 unidades de riboflavina, 16 de hierro y 14 de carbohidratos?

Solución:

Utilizamos las incógnitas:

x = gramos del complemento A

y = gramos del complemento B

De los datos del problema podemos sacar la siguiente tabla:

	Unidades de		
	Riboflavina	Hierro	Carbohidratos
1 g de A	2	3	2
1 g de B	2	1	4
Necesitamos	12	16	14

El sistema de ecuaciones a plantear será:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 12 \\ 3x + y = 16 \\ 2x + 4y = 14 \end{cases} \quad \text{Simplificando las ecuaciones queda:} \quad \begin{cases} x + y = 6 \\ 3x + y = 16 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$$

Resolvamos el sistema por el método de Gauss,

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 16 \\ 1 & 2 & 7 \end{array} \right) \quad \begin{matrix} F_2 - 3F_1 \\ F_3 - F_1 \end{matrix} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad F_3 + \frac{1}{2}F_2 \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Luego es un sistema compatible determinado.

Resolución,

De la segunda fila de la matriz: $-2y = -2$; $y = \frac{-2}{-2} = 1$

De la primera fila de la matriz: $x + y = 6$; $x + 1 = 6$; $x = 6 - 1$; $x = 5$

Solución: Son necesarios 5 gramos del complemento A y 1 gramo del complemento B.

EJERCICIO A

PROBLEMA 2.

- a) Halla los vértices de la región determinada por las siguientes inecuaciones:

$$3x + y \leq 12, \quad x - 2y \geq -3, \quad y \geq \frac{x}{2} - 2, \quad 2x + 3y \geq 1$$

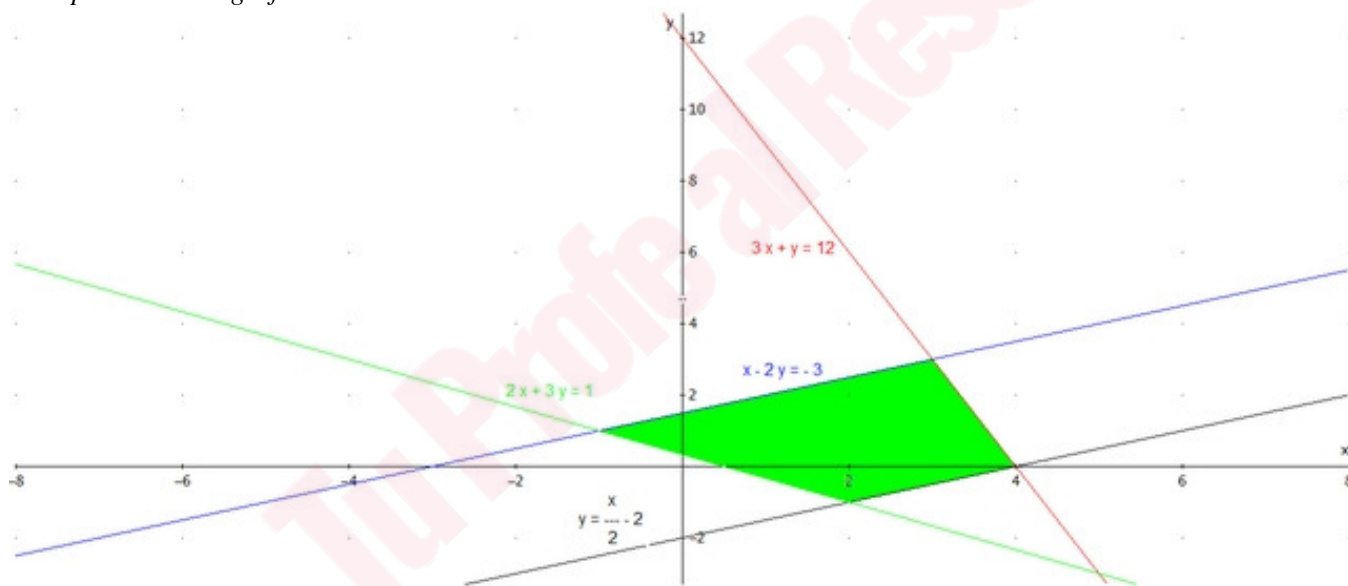
- b) Calcula los puntos de la región donde la función
- $f(x) = 3x - 2y$
- alcanza los valores máximo y mínimo y determina éstos.

Solución:

a) Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

(a) $3x + y \leq 12$	(b) $x - 2y \geq -3$	(c) $y \geq \frac{x}{2} - 2$	(d) $2x + 3y \geq 1$																								
$3x + y = 12$	$x - 2y = -3$	$y = \frac{x}{2} - 2$	$2x + 3y = 1$																								
<table border="1"> <tr><td>x</td><td>y</td></tr> <tr><td>0</td><td>12</td></tr> <tr><td>4</td><td>0</td></tr> </table>	x	y	0	12	4	0	<table border="1"> <tr><td>x</td><td>y</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>-3</td><td>0</td></tr> </table>	x	y	1	2	-3	0	<table border="1"> <tr><td>x</td><td>y</td></tr> <tr><td>0</td><td>-2</td></tr> <tr><td>4</td><td>0</td></tr> </table>	x	y	0	-2	4	0	<table border="1"> <tr><td>x</td><td>y</td></tr> <tr><td>2</td><td>-1</td></tr> <tr><td>-1</td><td>1</td></tr> </table>	x	y	2	-1	-1	1
x	y																										
0	12																										
4	0																										
x	y																										
1	2																										
-3	0																										
x	y																										
0	-2																										
4	0																										
x	y																										
2	-1																										
-1	1																										
$3 \cdot 0 + 0 \leq 12$ Sí	$0 - 2 \cdot 0 \geq -3$ Sí	$0 \geq 0 - 2$ Sí	$2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \geq 1$ No																								

La representación gráfica será:



Los vértices de la región determinada por las inecuaciones los obtendremos mediante los puntos de corte de las rectas correspondientes.

De (a) y (b): $(3, 3)$

$$\begin{cases} 3x + y = 12 \\ x - 2y = -3 \end{cases} \quad 2x1^a \begin{cases} 6x + 2y = 24 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$$

sumando ambas ecuaciones: $7x = 21$; $x = 3$ sustituyendo en la 2ª ecuación: $3 - 2y = -3$; $-2y = -6$; $y = 3$ De (a) y (c): $(4, 0)$ (según hemos obtenido en la tabla de valores de ambas rectas)De (c) y (d): $(2, -1)$

$$\begin{cases} y = \frac{x}{2} - 2 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases} \quad \text{Sustituyendo el valor de } y \text{ en la 2ª ecuación}$$

$$2x + 3\left(\frac{x}{2} - 2\right) = 1; \quad 2x + \frac{3x}{2} - 6 = 1$$

$$4x + 3x - 12 = 2; \quad 7x = 14; \quad x = 2$$

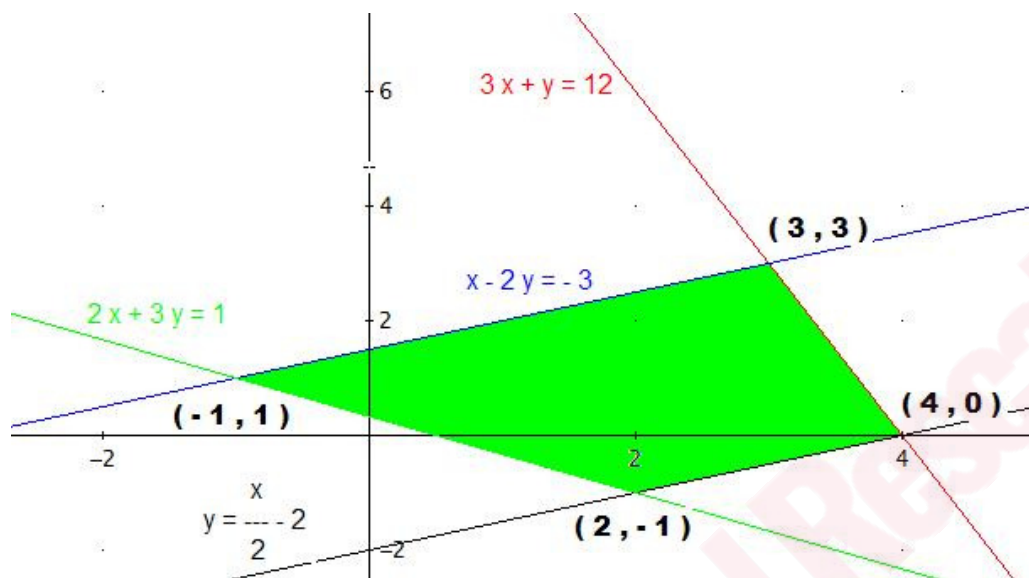
$$y = \frac{2}{2} - 2 = 1 - 2 = -1$$

De (d) y (b): $(-1, 1)$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - 2y = -3 \end{cases} \quad -2x + 2^a \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ -2x + 4y = 6 \end{cases}$$

sumando ambas ecuaciones: $7y = 7; \quad y = 1$

sustituyendo en la 2ª ecuación: $x - 2 \cdot 1 = -3; \quad x = -1$



Los vértices de la región determinada por las inecuaciones son: $(3, 3)$, $(4, 0)$, $(2, -1)$ y $(-1, 1)$

b) Los puntos de la región obtenida anteriormente en que la función dada alcanza sus valores máximo y mínimo serán los vértices de ella o los puntos de alguno de los segmentos que la delimitan.

Calculemos los valores de la función en los vértices,

x, y	$f(x, y) = 3x - 2y$
$3, 3$	$3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 = 3$
$4, 0$	$3 \cdot 4 - 2 \cdot 0 = 12$ Máximo
$2, -1$	$3 \cdot 2 - 2(-1) = 8$
$-1, 1$	$3(-1) - 2 \cdot 1 = -5$ Mínimo

$f(x, y)$ alcanza el máximo en el punto $(4, 0)$ y vale 12; y el mínimo en el punto $(-1, 1)$ y vale -5 .

EJERCICIO A

PROBLEMA 3. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & 0 \leq x < 2 \\ x^2 - 6x + 12 & 2 \leq x \leq 4 \\ -2x + a & 4 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

- Halla el valor de a para que la función $y = f(x)$ sea continua en el intervalo $[0,8]$.
- Halla los máximos y mínimos absolutos de $y = f(x)$ en el intervalo $[0,4]$. Justifica que los puntos encontrados son máximos y mínimos absolutos.
- Calcula el área de la región del plano limitada por las rectas de ecuación $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$ y la gráfica de $y = f(x)$.

Solución:

a) Estudiamos la función en cada trozo de definición y en los puntos de cambio de definición.

En $[0, 2)$, $f(x) = x + 2$ es un polinomio, luego es continuaEn $(2, 4)$, $f(x) = x^2 - 6x + 12$ es un polinomio, luego es continuaEn $(4, 8]$, $f(x) = -2x + a$ es un polinomio, luego es continuaVeamos si es continua en $x = 2$,

i) $f(2) = 2^2 - 6 \cdot 2 + 12 = 4$

ii)

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x+2) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 6x + 12) = 4 \end{cases} = 4$$

iii)

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

Por lo que $f(x)$ es continua en $x = 2$ Veamos si es continua en $x = 4$

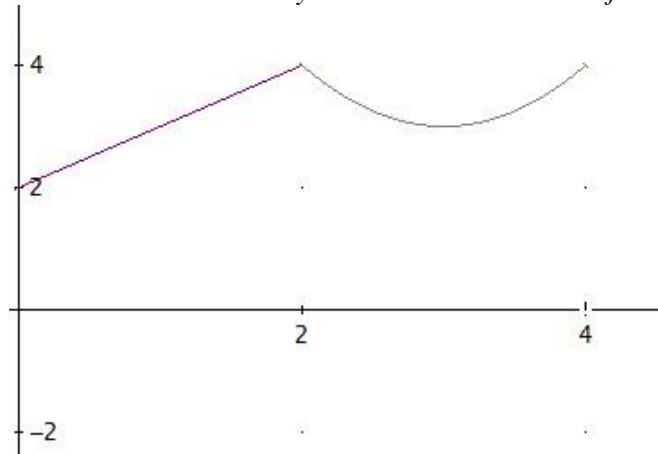
i) $f(4) = 4^2 - 6 \cdot 4 + 12 = 16 - 24 + 12 = 4$

ii)

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (x^2 - 6x + 12) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (-2x + a) = -2 \cdot 4 + a = -8 + a \end{cases}$$

Para que exista el límite debe ser $4 = -8 + a$; $a = 12$ Para $a = 12$ se cumple que $f(4) = \lim_{x \rightarrow 4} f(x)$, por lo que $f(x)$ es continua en $x = 4$ En conclusión, para que $f(x)$ sea continua en el intervalo $[0, 8]$ debe ser $a = 12$

b)

Para hallar los máximos y mínimos absolutos de la función en el intervalo $[0, 4]$ podemos representar la función,En $[0, 2]$ $f(x) = x + 2$, es una función creciente, el mínimo absoluto está en su extremo inferior y el máximo absoluto en su extremo superior.En $[2, 4]$ $f(x) = x^2 - 6x + 12$ que por ser una parábola con coeficiente de x^2 positivo alcanza su mínimo absoluto en el

$$x = \frac{-(-6)}{2 \cdot 1} = 3 \in [2, 4]$$

vértice,

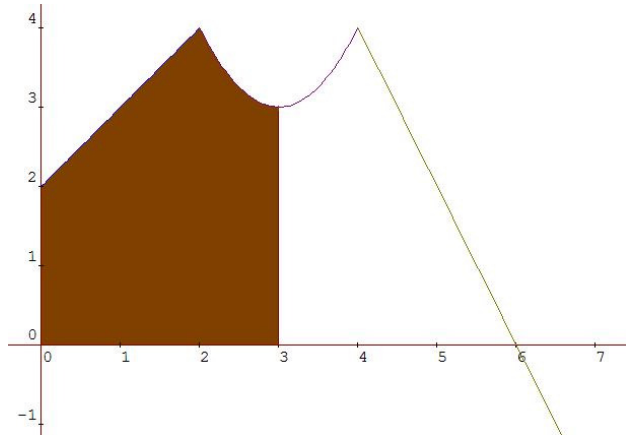
y el máximo absoluto en alguno de los extremos del intervalo. Calculemos el valor de la función en los puntos indicados.

x	$f(x)$
0	2
2	4
3	$3^2 - 6 \cdot 3 + 12 = 3$
4	4

Por lo tanto el mínimo absoluto está en el punto $(0, 2)$ y los máximos absolutos en los puntos $(2, 4)$ y $(4, 4)$.

c)

El área a calcular es la de la zona sombreada



El cálculo del área es:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^2 (x+2)dx + \int_2^3 (x^2 - 6x + 12)dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^2 + \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 12x \right]_2^3 = \\
 &= \frac{4}{2} + 4 + \left(\frac{27}{3} - 27 + 36 \right) - \left(\frac{8}{3} - 12 + 24 \right) = 2 + 4 + \frac{27}{3} + 9 - \frac{8}{3} - 12 = 3 + \frac{19}{3} = \frac{28}{3} \text{ u.a.}
 \end{aligned}$$

EJERCICIO A

PROBLEMA 4. Se sabe que $p(A) = 0,4$, $p(B) = 0,6$ y $p(A \cup B) = 0,7$.

- ¿Son independientes los sucesos A y B? ¿Por qué?
- Calcula $p(A \cap \bar{B})$, donde $\bar{B}$ denota el suceso contrario o complementario de B.
- Calcula $p(\bar{A} \cap \bar{B})$.

Solución:

a) A y B son sucesos independientes cuando $p(A \cap B) = p(A) p(B)$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$0,7 = 0,4 + 0,6 - p(A \cap B)$$

$$p(A \cap B) = 1,3 - 0,7 = 0,6$$

$$p(A) p(B) = 0,4 \cdot 0,6 = 0,24 \neq 0,6$$

Luego A y B no son independientes.

b) Podemos expresar,

$$A = A \cap E = A \cap (B \cup \bar{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$$

$$p(A) = p[(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})] = p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B}) - p[(A \cap B) \cap (A \cap \bar{B})] =$$

$$= p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B}) - p(A \cap B \cap A \cap \bar{B}) = p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B}) - p(\emptyset) = p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B})$$

sustituyendo las probabilidades conocidas,

$$0,4 = 0,6 + p(A \cap \bar{B}) \rightarrow p(A \cap \bar{B}) = 0,2$$

c) Sabemos que

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$\text{por lo que: } p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) = 1 - 0,7 = 0,3$$

EJERCICIO B

PROBLEMA 1. Obtén todas las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = -1 \\ 2x - y + z = 0 \\ -2x + 7y + z = -4 \end{array} \right\}$$

Solución:

Resolveremos el sistema por el método de Gauss. Utilizaremos la matriz ampliada del sistema,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 7 & 1 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow[F_3 + 2.F_1]{F_2 - 2.F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 9 & 3 & -6 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 + 3.F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Es un sistema compatible indeterminado, lo resolvemos utilizando la 1ª y 2ª ecuación y como incógnitas principales x e y .

El sistema a resolver es:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = -1 - z \\ -3y = 2 + z \end{array} \right.$$

Lo resolvemos por Cramer,

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3$$

Las soluciones del último sistema,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1-z & 1 \\ 2+z & -3 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{3+3z-2-z}{-3} = \frac{1+2z}{-3} = \frac{-1-2z}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1-z \\ 0 & 2+z \end{vmatrix}}{-3} = \frac{2+z}{-3} = \frac{-2-z}{3}$$

El sistema planteado tiene por soluciones,

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{-1-2\lambda}{3} \\ y = \frac{-2-\lambda}{3} \\ z = \lambda \end{array} \right. \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

EJERCICIO B

PROBLEMA 2. Dada la función $f(x) = \frac{x^2 + 4}{2x - 3}$, se pide

- Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.
- Ecuación de sus asíntotas verticales y horizontales.
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Máximos y mínimos locales.
- Representación gráfica a partir de la información de los apartados anteriores.

Solución:

a)

Dominio,

$$2x - 3 = 0; \quad x = \frac{3}{2}; \quad \text{Dom } f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{3}{2} \right\}$$

Puntos de corte,

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \rightarrow y = \frac{0+4}{0-3} = \frac{-4}{3} \\ y = 0 \rightarrow \frac{x^2+4}{2x-3} = 0 \rightarrow x^2+4=0 \text{ no tiene solución} \end{array} \right\} \left(0, \frac{-4}{3} \right)$$

b) *Asíntotas verticales,*

Veamos si $x = \frac{3}{2}$ es a. v.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{x^2+4}{2x-3} = \frac{\frac{9}{4}+4}{2\frac{3}{2}-3} = \frac{\frac{25}{4}}{0} = \infty \rightarrow x = \frac{3}{2} \text{ es a. v.}$$

Asíntotas horizontales,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+4}{2x-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+4}{2x-3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2} = -\infty$$

No hay asíntota horizontal

c) *Intervalos de crecimiento y decrecimiento.*

Debemos estudiar el signo de la primera derivada,

$$f'(x) = \frac{2x(2x-3) - (x^2+4)2}{(2x-3)^2} = \frac{4x^2 - 6x - 2x^2 - 8}{(2x-3)^2} = \frac{2x^2 - 6x - 8}{(2x-3)^2}$$

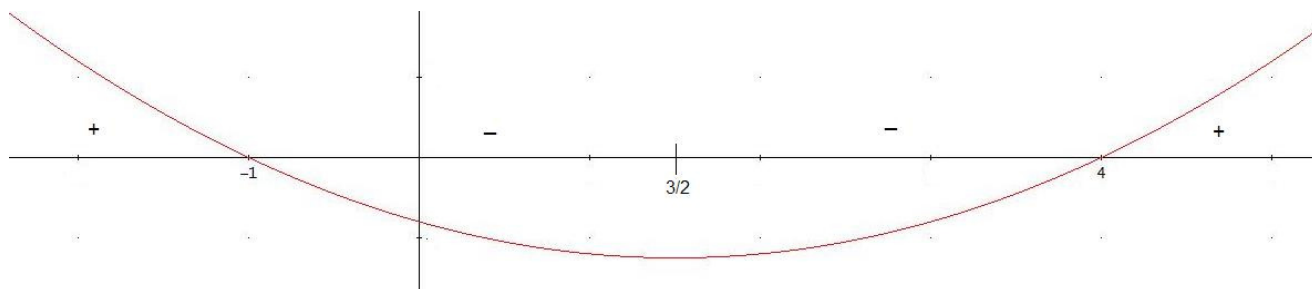
Busquemos las raíces del numerador y del denominador,

$$2x^2 - 6x - 8 = 0 \rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{3+5}{2} = 4 \\ \frac{3-5}{2} = -1 \end{cases}$$

$$(2x-3)^2 = 0 \rightarrow 2x-3=0 \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

Debemos considerar también el valor que no es del dominio de la función, coincide con la última raíz obtenida.

Marcamos en la recta real las tres raíces obtenidas. Como el denominador de f' está elevado al cuadrado siempre es positivo, luego el signo de f' sólo depende del signo del numerador. Como el numerador es un polinomio de 2º grado sabemos que gráficamente es una parábola y esto nos sirve para determinar su signo.



$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$

$f(x)$ es decreciente en $\left(-1, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, 4\right)$

d) Máximos y mínimos locales.

El estudio realizado en el apartado anterior no permite encontrar los extremos locales de esta función, Máximo $(-1, -1)$

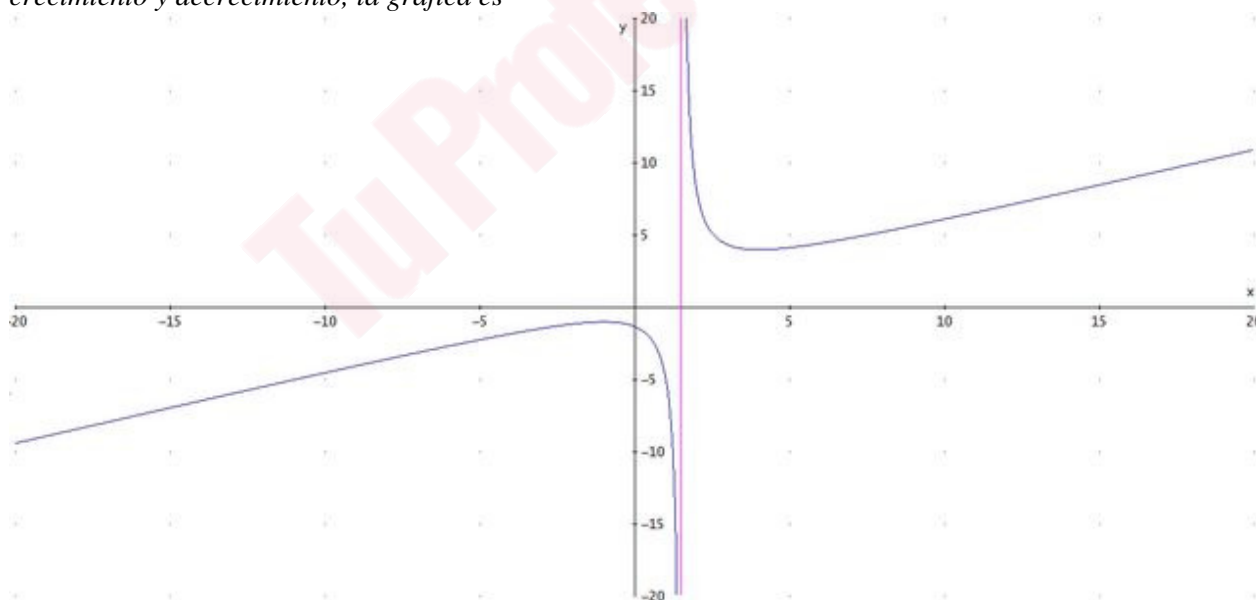
$$x = -1 \rightarrow f(-1) = \frac{(-1)^2 + 4}{2(-1) - 3} = \frac{5}{-5} = -1$$

Mínimo $(4, 4)$

$$x = 4 \rightarrow f(4) = \frac{4^2 + 4}{2 \cdot 4 - 3} = \frac{20}{5} = 4$$

e) Representación gráfica.

Trazamos la asíntota vertical, el punto de corte, el máximo y el mínimo locales y considerando los intervalos de crecimiento y decrecimiento, la gráfica es



EJERCICIO B

PROBLEMA 3. Dada la función $y = x^3 - 9x^2 + 24x + 3$:

- Calcula los máximos y mínimos locales. Justifica que los puntos encontrados son máximos y mínimos locales.
- Halla el área de la región del plano determinada por la gráfica de $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$, $x = 0$, $y = x = 5$.

Solución:

a)

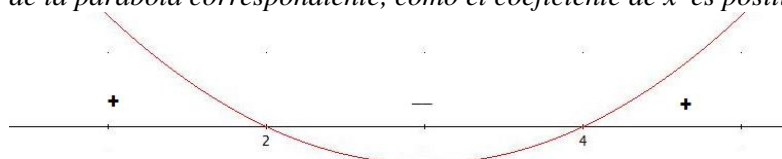
$$y = x^3 - 9x^2 + 24x + 3$$

$$y' = 3x^2 - 18x + 24$$

$$3x^2 - 18x + 24 = 0; \quad x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{6+2}{2} = 4 \\ \frac{6-2}{2} = 2 \end{cases}$$

Como la primera derivada es un polinomio de 2º grado estudiamos el signo de y' a través de la representación gráfica de la parábola correspondiente, como el coeficiente de x^2 es positivo será



En $x = 2$, la función pasa de creciente a decreciente por lo que presenta un máximo local.

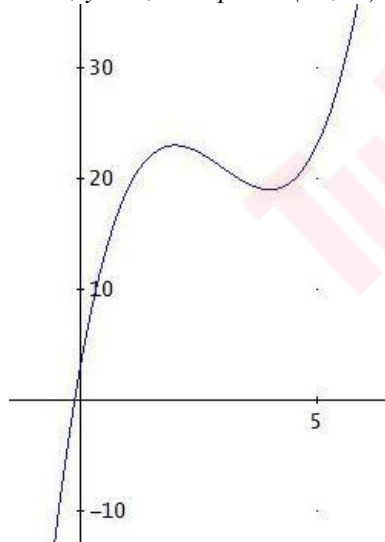
En $x = 4$ la función pasa de decreciente a creciente por lo que presenta un mínimo local.

$$x = 2, \quad y = 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 24 \cdot 2 + 3 = 8 - 36 + 48 + 3 = 59 - 36 = 23. \quad \text{Máximo local } (2, 23)$$

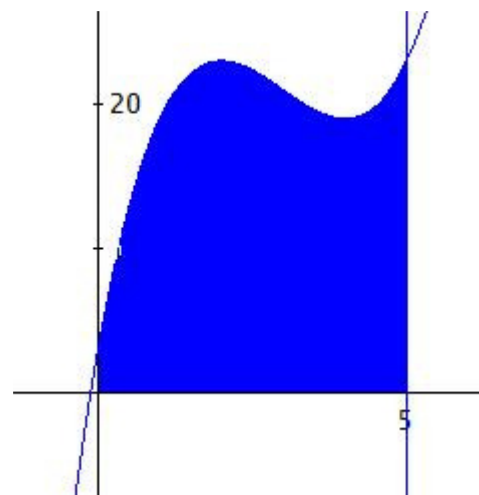
$$x = 4, \quad y = 4^3 - 9 \cdot 4^2 + 24 \cdot 4 + 3 = 64 - 144 + 96 + 3 = 163 - 144 = 19. \quad \text{Máximo local } (4, 19)$$

b) Como y es una función polinómica de tercer grado con los datos del apartado anterior y algún punto más podemos representarla,

$$x = 0, y = 3, \text{ otro punto } (0, 3)$$



La región del plano de la que debemos calcular su área será



Este área podemos calcularla mediante la siguiente integral

$$A = \int_0^5 (x^3 - 9x^2 + 24x + 3) dx = \left[\frac{x^4}{4} - 3x^3 + 12x^2 + 3x \right]_0^5 = \frac{625}{4} - 3 \cdot 125 + 12 \cdot 25 + 15 = 96,25 \text{ u.a.}$$

EJERCICIO B

PROBLEMA 4. De dos tiradores se sabe que uno de ellos hace 2 dianas de cada 3 disparos, y el otro consigue 3 dianas de cada 4 disparos. Si los dos disparan simultáneamente, calcula:

- La probabilidad de que los dos acierten.
- La probabilidad de que uno acierte y el otro no.
- La probabilidad de que ninguno acierte.
- La probabilidad de que alguno acierte.
- Sumar las probabilidades de a), b) y c), justificando la suma obtenida.

Solución:

Utilizamos los sucesos: A = primer tirador acierta; B = segundo tirador acierta

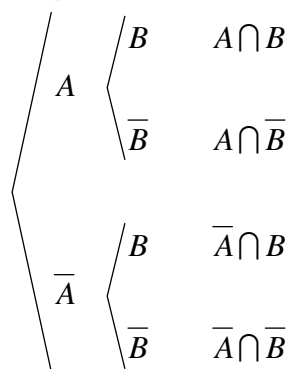
$$p(A) = \frac{2}{3} \quad \text{y} \quad p(B) = \frac{3}{4}$$

De los datos del problema sabemos que

$$p(\bar{A}) = \frac{1}{3} \quad \text{y} \quad p(\bar{B}) = \frac{1}{4}$$

Como los resultados de un tirador no influyen en el otro, los dos disparan simultáneamente, A y B son sucesos independientes.

Los posibles resultados al disparar los dos tiradores serán



a) Los dos acierten

$$p(A \cap B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

b) Uno acierte y el otro no

$$p(A \cap \bar{B}) + p(\bar{A} \cap B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2}{12} + \frac{3}{12} = \frac{5}{12}$$

c) Ninguno acierte

$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

d) Alguno acierte

$$p(A \cap \bar{B}) + p(\bar{A} \cap B) + p(A \cap B) = \frac{5}{12} + \frac{1}{2} = \frac{11}{12}$$

(para el cálculo usamos los resultados de los apartados b) y a))

e) Sumar apartados a), b) y c)

$$a) + b) + c) = \frac{1}{2} + \frac{5}{12} + \frac{1}{12} = \frac{6+5+1}{12} = \frac{12}{12} = 1$$

Los resultados posibles de este "experimento" son los cuatro descritos inicialmente en el árbol, al sumar las probabilidades de los apartados a), b) y c) sumamos las de todos los resultados posibles, esta es la razón de que la suma sea 1.