

# PAU Comunidad Valenciana - Matemáticas II

Junio de 2016 · Convocatoria ordinaria

## Opción A

### Problema 1. Discusión de un sistema

Estudiamos el sistema

$$\begin{cases} ax - z = a, \\ 2x + ay + z = 1, \\ 2x + z = 2. \end{cases}$$

Su matriz de coeficientes y su matriz ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 & a \\ 2 & a & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

#### a) Valor de $a$ para que el sistema no tenga solución

Como  $A$  es cuadrada, primero calculamos su determinante:

$$\det A = a \begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & a \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = a^2 + 2a = a(a + 2).$$

Si  $a \neq 0$  y  $a \neq -2$ , entonces  $\det A \neq 0$ , así que  $\text{rg}(A) = 3$ . En ese caso el sistema tiene una única solución y no puede ser incompatible. Por tanto, solo tenemos que comprobar  $a = 0$  y  $a = -2$ .

**Caso  $a = 0$ .** Las matrices quedan

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_0^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

El menor de orden 2 formado por las filas 1 y 2 y las columnas  $x, z$  de  $A_0$  vale

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

La segunda columna de  $A_0$  es nula y las filas 2 y 3 son iguales; por ello  $\text{rg}(A_0) = 2$ .

En  $A_0^*$ , tomamos las filas 1, 2 y 3 y las columnas  $x, z$  y término independiente:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Luego  $\text{rg}(A_0^*) = 3$ . Por Rouché-Frobenius, como  $\text{rg}(A_0) \neq \text{rg}(A_0^*)$ , el sistema es incompatible: no tiene solución.

**Caso  $a = -2$ .** En la matriz ampliada, la primera fila es la opuesta de la tercera:

$$A_{-2}^* = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,  $\text{rg}(A_{-2}^*) \leq 2$ . Calculamos el determinante del menor de orden 2 de  $A_{-2}$  formado por las filas 2 y 3 y las columnas  $x, y$ :

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

Así,  $\text{rg}(A_{-2}) = 2$ . Como  $A_{-2}$  es una submatriz de  $A_{-2}^*$ , su rango ampliado también es al menos 2; por tanto,  $\text{rg}(A_{-2}) = \text{rg}(A_{-2}^*) = 2 < 3$ . El sistema es compatible indeterminado.

En conclusión, el único valor que hace que el sistema no tenga solución es

$$\boxed{a = 0}.$$

### b) Soluciones cuando el sistema es compatible indeterminado

El caso compatible indeterminado es  $a = -2$ . El sistema queda

$$\begin{cases} -2x - z = -2, \\ 2x - 2y + z = 1, \\ 2x + z = 2. \end{cases}$$

La primera ecuación es la opuesta de la tercera. De la tercera:

$$z = 2 - 2x.$$

Sustituimos en la segunda:

$$2x - 2y + (2 - 2x) = 1 \implies -2y = -1 \implies y = \frac{1}{2}.$$

Tomamos  $x = t$ , con  $t \in \mathbb{R}$ . Todas las soluciones son

$$\boxed{(x, y, z) = \left(t, \frac{1}{2}, 2 - 2t\right), t \in \mathbb{R}.$$

### c) Solución para $a = -1$

Como  $\det A = (-1)(1) = -1 \neq 0$ , existe una única solución. El sistema es

$$\begin{cases} -x - z = -1, \\ 2x - y + z = 1, \\ 2x + z = 2. \end{cases}$$

La primera ecuación da  $x + z = 1$ . Al restarla de la tercera se obtiene  $x = 1$ , y entonces  $z = 0$ . En la segunda:

$$2(1) - y + 0 = 1 \implies y = 1.$$

Por tanto,

$$\boxed{(x, y, z) = (1, 1, 0)}.$$

## Problema 2. Rectas y planos en el espacio

Las rectas  $r$  y  $s$  son

$$r : \begin{cases} x - 2y + z + 3 = 0, \\ 3x + y - z + 1 = 0, \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 1, \\ y = 2\alpha, \\ z = \alpha - 2. \end{cases}$$

### a) Recta que pasa por $P = (0, 1, 0)$ y es paralela a $r$

Para escribir  $r$  en forma paramétrica, llamamos  $x = -1 + t$ . De las dos ecuaciones de  $r$ :

$$x + z = 2y - 3, \quad 3x - z = -y - 1.$$

Al sumarlas,  $4x - y = -4$ , de modo que  $y = 4x + 4 = 4t$ . Luego

$$z = 2y - 3 - x = 8t - 3 - (-1 + t) = -2 + 7t.$$

Así,

$$r : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 4t \\ z = -2 + 7t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

y un vector director de  $r$  es  $\vec{u} = (1, 4, 7)$ . Una recta paralela tiene el mismo vector director. Al imponer que pase por  $P$ , resulta

$$\ell : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 4t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = 7t \end{cases}$$

### b) Plano que contiene a $r$ y es paralelo a $s$

De la forma paramétrica de  $r$ , tomamos el punto  $R = (-1, 0, -2)$  y el vector director  $\vec{u} = (1, 4, 7)$ . De  $s$ , un punto es  $S = (1, 0, -2)$  y un vector director es  $\vec{v} = (0, 2, 1)$ .

Un plano que contiene ambas direcciones tiene como vector normal el producto vectorial:

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-10, -1, 2).$$

Podemos usar el normal equivalente  $(10, 1, -2)$ . La ecuación general del plano que pasa por  $R$  es

$$10(x + 1) + y - 2(z + 2) = 0.$$

Por tanto,

$$10x + y - 2z + 6 = 0.$$

### c) Distancia entre $r$ y $s$

Comprobamos primero que son rectas alabeadas. Sus vectores directores no son proporcionales, pues  $(1, 4, 7)$  no es múltiplo de  $(0, 2, 1)$ . Además,

$$(S - R) \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = (2, 0, 0) \cdot (-10, -1, 2) = -20 \neq 0.$$

El producto mixto no nulo indica que las dos direcciones y el vector que une un punto de cada recta no están en un mismo plano; por tanto,  $r$  y  $s$  son alabeadas.

La distancia entre dos rectas alabeadas se calcula con

$$d(r, s) = \frac{|(S - R) \cdot (\vec{u} \times \vec{v})|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}.$$

Sustituimos los vectores:

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \sqrt{(-10)^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{105}, \quad d(r, s) = \frac{20}{\sqrt{105}} = \frac{4\sqrt{105}}{21}.$$

Así, la distancia es

$$\frac{20}{\sqrt{105}} = \frac{4\sqrt{105}}{21}.$$

### Problema 3. Análisis de una función

La función dada en el enunciado es:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}.$$

#### Dominio y asíntotas

El denominador se factoriza como

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3).$$

Una función racional está definida cuando su denominador no es cero. Aquí el denominador se anula en  $x = 2$  y  $x = 3$ ; por tanto,

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}.$$

**Asíntotas verticales.** Al acercarnos a  $x = 2$ , el denominador tiende a cero:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty.$$

Por ello,  $x = 2$  es asíntota vertical. De igual modo,

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty,$$

así que  $x = 3$  también es asíntota vertical.

**Asíntota horizontal.** En los dos extremos,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^2 - 5x + 6} = 0.$$

Por tanto,  $y = 0$  es asíntota horizontal. No hay asíntota oblicua: la pendiente que tendría una recta oblicua sería

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

que no es distinta de cero; en este caso ya hemos encontrado la asíntota horizontal  $y = 0$ .

#### Crecimiento, decrecimiento y extremos

Derivamos usando la regla de la potencia para  $u(x)^{-1}$ :

$$f'(x) = -\frac{(x^2 - 5x + 6)'}{(x^2 - 5x + 6)^2} = -\frac{2x - 5}{(x^2 - 5x + 6)^2} = \frac{5 - 2x}{(x^2 - 5x + 6)^2}.$$

La derivada se anula cuando  $5 - 2x = 0$ , es decir, en  $x = \frac{5}{2}$ . También separamos  $x = 2, 3$ , porque la función no está definida allí. Probamos el signo de  $f'$  en cada intervalo:

| Intervalo          | Valor de prueba | Signo de $f'$ | Comportamiento                                         |
|--------------------|-----------------|---------------|--------------------------------------------------------|
| $(-\infty, 2)$     | 0               | +             | Creciente                                              |
| $x = 2$            | -               | No definida   | Punto fuera del dominio; asíntota vertical, no extremo |
| $(2, \frac{5}{2})$ | $\frac{9}{4}$   | +             | Creciente                                              |
| $x = \frac{5}{2}$  | -               | $f' = 0$      | Cambia de + a -: máximo relativo                       |
| $(\frac{5}{2}, 3)$ | $\frac{11}{4}$  | -             | Decreciente                                            |
| $x = 3$            | -               | No definida   | Punto fuera del dominio; asíntota vertical, no extremo |
| $(3, \infty)$      | 4               | -             | Decreciente                                            |

En  $x = \frac{5}{2}$ , el signo cambia de + a -, así que hay un máximo relativo. Su valor es

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{\frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 6} = \frac{1}{-\frac{1}{4}} = -4.$$

El máximo relativo es  $\left(\frac{5}{2}, -4\right)$ . En  $x = 2$  y  $x = 3$  la función no está definida: son asíntotas verticales, no máximos ni mínimos. La función es creciente o decreciente por separado a cada lado, según la tabla.

### Primitiva

Factorizamos el denominador y descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}.$$

Al multiplicar por  $(x-2)(x-3)$ , queda

$$1 = A(x-3) + B(x-2).$$

Con  $x = 2$ ,  $1 = -A$ , de modo que  $A = -1$ . Con  $x = 3$ ,  $1 = B$ , por lo que  $B = 1$ . Así,

$$\int f(x) dx = \int \left( -\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} \right) dx = -\ln|x-2| + \ln|x-3| + C.$$

Por tanto,

$$\boxed{\int f(x) dx = \ln \left| \frac{x-3}{x-2} \right| + C.}$$

### Valor de $a > 4$ para que el área indicada sea $\ln(3/2)$

En el intervalo  $[4, a]$ , con  $a > 4$ ,  $x-2$  y  $x-3$  son positivos; por ello  $f(x) > 0$ , y el área es la integral definida:

$$\int_4^a f(x) dx = [\ln|x-3| - \ln|x-2|]_4^a = \left[ \ln \left( \frac{x-3}{x-2} \right) \right]_4^a.$$

Evaluamos en los extremos:

$$\int_4^a f(x) dx = \ln \left( \frac{a-3}{a-2} \right) - \ln \left( \frac{4-3}{4-2} \right) = \ln \left( \frac{2(a-3)}{a-2} \right).$$

Imponemos el área pedida:

$$\ln \left( \frac{2(a-3)}{a-2} \right) = \ln \left( \frac{3}{2} \right) \implies \frac{2(a-3)}{a-2} = \frac{3}{2}.$$

$$4(a-3) = 3(a-2) \implies 4a - 12 = 3a - 6 \implies a = 6.$$

Como  $6 > 4$ , cumple la condición. La respuesta es

$$\boxed{a = 6.}$$

## Opción B

### Problema 1. Matrices

Se da

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Comprobar que  $A^{-1} = \frac{1}{5}A^T$

Calculamos primero la traspuesta:

$$A^T = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Multiplicamos, mostrando el producto:

$$A^T A = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 5I.$$

Por tanto,  $\frac{1}{5}A^T$  multiplicada por  $A$  da la identidad. Esto demuestra que es la inversa:

$$A^{-1} = \frac{1}{5}A^T.$$

b) Valores reales de  $\lambda$  para los que  $A - \lambda I$  no es invertible

Una matriz cuadrada no es invertible exactamente cuando su determinante es cero. Calculamos:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} \sqrt{5} - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & -2 \\ 0 & 2 & 1 - \lambda \end{pmatrix},$$

$$\det(A - \lambda I) = (\sqrt{5} - \lambda) \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (\sqrt{5} - \lambda)((1 - \lambda)^2 + 4).$$

Para  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $(1 - \lambda)^2 + 4 > 0$ . El determinante solo puede ser cero si  $\sqrt{5} - \lambda = 0$ . Así,

$$\lambda = \sqrt{5}.$$

c) Determinante de  $B$

Se sabe que  $\det B > 0$  y  $B^{-1} = B^T$ . Tomamos determinantes en ambos lados. Usamos  $\det(B^{-1}) = 1/\det B$  y  $\det(B^T) = \det B$ :

$$\frac{1}{\det B} = \det B.$$

Como  $\det B > 0$ , al multiplicar por  $\det B$  obtenemos  $(\det B)^2 = 1$  y elegimos la raíz positiva. Por tanto,

$$\det B = 1.$$

## Problema 2. Geometría del espacio

El plano dado es  $\pi : 6x + 3y + 2z - 12 = 0$ , y los puntos son

$$A = (1, 0, 0), B = (0, 2, 0), C = (0, 0, 3).$$

a) Plano  $\sigma$  que pasa por  $A, B, C$  y posición respecto de  $\pi$

Los vectores del plano que parten de  $A$  son

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1, 2, 0), \overrightarrow{AC} = C - A = (-1, 0, 3).$$

Un vector normal se obtiene mediante el producto vectorial:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (6, 3, 2).$$

La ecuación general del plano que pasa por  $A$  es

$$6(x - 1) + 3y + 2z = 0,$$

es decir,

$$\sigma : 6x + 3y + 2z - 6 = 0.$$

Los planos  $\sigma$  y  $\pi$  tienen el mismo vector normal  $(6, 3, 2)$ , pero sus términos independientes son distintos. Son planos paralelos y distintos:

$$\sigma \parallel \pi, \sigma \neq \pi.$$

### b) Área del triángulo $ABC$

El área del triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial de dos lados que parten del mismo vértice:

$$\text{Área}(ABC) = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2} \sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2} = \boxed{\frac{7}{2}}.$$

### c) Un punto $P$ de $\pi$ para que el volumen del tetraedro $PABC$ sea 1

Elegimos  $P = (2, 0, 0)$ . Comprobamos que pertenece a  $\pi$ :

$$6(2) + 3(0) + 2(0) - 12 = 0.$$

El volumen de un tetraedro se obtiene con el valor absoluto del determinante de los tres vectores que parten del mismo vértice, dividido entre 6. Desde  $P$ :

$$\overrightarrow{PA} = (-1, 0, 0), \overrightarrow{PB} = (-2, 2, 0), \overrightarrow{PC} = (-2, 0, 3).$$

Entonces

$$V = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} |-6| = 1.$$

El punto pedido es

$$\boxed{P = (2, 0, 0)}.$$

### Problema 3. Optimización

Una empresa vende  $x$  toneladas de acero de baja calidad e  $y$  toneladas de alta calidad. La relación entre las cantidades es

$$y = \frac{23 - 5x}{10 - x}, \quad 0 < x < \frac{23}{5}.$$

Cada tonelada de baja calidad se vende a 300 euros y cada tonelada de alta calidad a 900 euros.

#### Función de ingresos

Los ingresos son precio por cantidad de cada tipo:

$$R(x) = 300x + 900y = 300x + 900 \left( \frac{23 - 5x}{10 - x} \right).$$

El dominio del problema es  $0 < x < \frac{23}{5}$ , tal como establece el enunciado. En este intervalo  $10 - x > 10 - \frac{23}{5} = \frac{27}{5} > 0$ , así que el denominador no se anula.

#### Cantidades que maximizan los ingresos

Derivamos la función. Para la fracción usamos la regla del cociente:

$$\left( \frac{23 - 5x}{10 - x} \right)' = \frac{(-5)(10 - x) - (23 - 5x)(-1)}{(10 - x)^2} = \frac{-27}{(10 - x)^2}.$$

Así,

$$R'(x) = 300 - \frac{24300}{(10 - x)^2} = \frac{300((10 - x)^2 - 81)}{(10 - x)^2} = \frac{300(1 - x)(19 - x)}{(10 - x)^2}.$$

Los puntos críticos satisfacen  $R'(x) = 0$ : son  $x = 1$  y  $x = 19$ . Solo  $x = 1$  pertenece al intervalo permitido. Para justificar el comportamiento, probamos un valor a cada lado de 1:

$$R' \left( \frac{1}{2} \right) = \frac{11100}{361} > 0, \quad R'(2) = -\frac{1275}{16} < 0.$$

La función crece antes de  $x = 1$  y decrece después:

| Intervalo           | Valor de prueba | Signo de $R'$ | Ingresos     |
|---------------------|-----------------|---------------|--------------|
| $(0, 1)$            | $\frac{1}{2}$   | +             | Crecientes   |
| $(1, \frac{23}{5})$ | 2               | -             | Decrecientes |

Por tanto, los ingresos máximos se alcanzan cuando  $x = 1$  tonelada de baja calidad. La cantidad de alta calidad es

$$y = \frac{23 - 5(1)}{10 - 1} = \frac{18}{9} = 2 \text{ toneladas.}$$

Los ingresos máximos son

$$R(1) = 300(1) + 900(2) = 2100 \text{ euros.}$$

La empresa maximiza sus ingresos vendiendo 1 tonelada de acero de baja calidad y 2 toneladas de alta calidad; el ingreso máximo es

**2100 euros.**