

Extraordinaria suplente de 2021

Resolución completa de los ocho ejercicios, con desarrollo matemático y resultados exactos.

Ejercicio 1

Usamos el desarrollo $\frac{x+1}{\ln(1+x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} + o(1)$. En el límite del enunciado, $\frac{x+1}{\ln(1+x)} - \frac{a}{x} = \frac{1-a}{x} + \frac{1}{2} + o(1)$. Para que el límite sea finito, debe anularse el numerador del término $1/x$: $a = 1$. El límite vale entonces $\boxed{1/2}$.

Ejercicio 2

La pendiente de la asíntota oblicua de $(ax^2 + b)/(a - x)$ es $-a$, así que $a = 4$. Al pasar la gráfica por $(2, 3)$, $(16 + b)/2 = 3$ y $b = -10$.

Para la parte b, al tomar $a = 2, b = 3, f(1) = 5$ y

$$f'(x) = \frac{-2x^2 + 8x + 3}{(2-x)^2}, \quad f'(1) = 9.$$

Las rectas tangente y normal son, respectivamente,

$$\boxed{y - 5 = 9(x - 1)}, \quad \boxed{y - 5 = -\frac{1}{9}(x - 1)}.$$

Ejercicio 3

El valor absoluto obliga a estudiar $x < 1$ y $x > 1$ por separado:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 - x, & x < 1, \\ x^2 + x - 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

Las derivadas son $2x - 1$ y $2x + 1$. En el primer tramo se anula en $x = 1/2$; en el segundo su cero no pertenece al tramo. La función decrece hasta $1/2$ y crece desde ahí, también a través de $x = 1$, donde es continua. Tiene mínimo $f(1/2) = 3/4$.

Para integrar, dividimos donde cambia la expresión:

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 (x^2 + 1 - x)dx + \int_1^2 (x^2 + x - 1)dx = \boxed{\frac{11}{3}}.$$

Ejercicio 4

Usamos $t = e^{x/2}$, de modo que $dx = 2dt/t$ y los límites pasan de $x = 0, 2$ a $t = 1, e$:

$$\int_0^2 \frac{dx}{1 + \sqrt{e^x}} = 2 \int_1^e \frac{dt}{t(1+t)} = 2 [\ln t - \ln(1+t)]_1^e.$$

Por tanto,

$$\boxed{2 \ln \left(\frac{2e}{e+1} \right)}.$$

Ejercicio 5

Restando la primera fila de la segunda y de la tercera se ve que $\det A = 2m$. La matriz es invertible si y solo si $m \neq 0$. Para $m = 1$,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5/2 & -1 & -1/2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Como $(\frac{1}{2}A)^{-1} = 2A^{-1}$, se obtiene

$$\left(\frac{1}{2}A\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 6

Sean c, t, j los precios de un café, una tostada y un zumo. Las compras satisfacen $3c + t + 2j = 7,50$ y $4c + t + j = 7,20$. Restando combinaciones, $2c + t + 3j$ es el doble de la primera cantidad menos la segunda:

$$2c + t + 3j = 2(7,50) - 7,20 = \boxed{7,80 \text{ euros}}.$$

Si $j = 2$, las ecuaciones darían $c = 1,70$ y $t = -1,60$. El precio negativo de la tostada no es posible, así que el zumo no puede costar 2 euros.

Ejercicio 7

El normal del plano es $\vec{n} = (1, -1, 1)$. En $P = (1, 0, 1)$, $x - y + z + 1 = 3$ y $|\vec{n}|^2 = 3$, por lo que el pie de la perpendicular es $H = P - \vec{n} = (0, 1, 0)$. El simétrico es

$$P' = 2H - P = \boxed{(-1, 2, -1)}.$$

La distancia de P al plano es $3/\sqrt{3} = \boxed{\sqrt{3}}$.

Ejercicio 8

La recta r es $(x, y, z) = (2, 1, 0) + t(-2, 1, -2)$. La recta s tiene director $(2, -1, 2)$, obtenido como producto vectorial de las normales de sus planos. Los directores son proporcionales, pues $(2, -1, 2) = -(-2, 1, -2)$. Además, en todo punto de r se tiene $x + 2y = 4$, mientras que en s esa expresión vale 3, así que son paralelas distintas. Un punto de s es $(3, 0, 2)$; junto con el director de r determina el plano $2y + z - 2 = 0$, que contiene a ambas rectas. Por tanto, el plano pedido es $\boxed{2y + z - 2 = 0}$.