

CATALUÑA · PAU 2012 · ORDINARIA

# Matemáticas II

12 ejercicios · 90 min de duración

## Instrucciones del examen

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Cada cuestión vale 2 puntos. Puede utilizar calculadora, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que lleven información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

## Ejercicio 1

OPCIÓN A 2 puntos

Diga para qué valor del parámetro  $m$  los planos

$$\pi_1 : x - y + mz = 1, \pi_2 : x - y + z = m \text{ y } \pi_3 : my + 2z = 3$$

tienen como intersección una recta.

## Ejercicio 1

OPCIÓN B 2 puntos

Dados los planos  $\pi_1 : 3x + y - 2z + 15 = 0$  y  $\pi_2 : x + y + 2z - 103 = 0$ :

a) 1 punto

Compruebe que son perpendiculares.

b) 1 punto

Calcule la ecuación cartesiana (es decir, de la forma  $Ax + By + Cz + D = 0$ ) del plano perpendicular a  $\pi_1$  y  $\pi_2$ , que pasa por el punto  $P = (1, 3, 2)$ .

## Ejercicio 2

OPCIÓN A 2 puntos

Dadas la recta  $y = 3x + b$  y la parábola  $y = x^2$ :

a) 1 punto

Calcule la abscisa del punto donde la recta tangente a la parábola es paralela a la recta dada.

b) 1 punto

Calcule el valor del parámetro  $b$  para que la recta sea tangente a la parábola.

## Ejercicio 2

OPCIÓN B 2 puntos

La gráfica de la función  $f(x) = x\sqrt{9 - x^2}$  es la siguiente:

a) 0,5 puntos

Halle el punto de corte,  $(a, 0)$ , de la función con la parte positiva del eje OX.

b) 1,5 puntos

Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de  $f(x)$  y el eje OX en el primer cuadrante.

### Ejercicio 3

OPCIÓN A 2 puntos

Dados el plano  $\pi : x - y + 2z - 5 = 0$  y la recta  $r : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 10 \end{cases}$ :

a) 1 punto

Calcule el punto de intersección entre el plano y la recta.

b) 1 punto

Halle la ecuación continua de la recta  $s$  contenida en el plano  $\pi$ , que es perpendicular a la recta  $r$  y corta a la recta  $r$ .

### Ejercicio 3

OPCIÓN B 2 puntos

Sea  $A$  una matriz cuadrada de orden  $n$  de manera que  $A^2 = O$ , en que  $O$  es la matriz nula (la formada completamente por ceros).

a) 1 punto

Compruebe que  $(A + I_n)^2 = 2A + I_n$ .

b) 1 punto

Compruebe que las matrices  $B = I_n - A$  y  $C = A + I_n$  son la una inversa de la otra.

### Ejercicio 4

OPCIÓN A 2 puntos

Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ :

a) 1 punto

Compruebe que se cumple la igualdad  $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ .

b) 1 punto

¿Es cierta esta igualdad para cualquier par de matrices cuadradas  $A$  y  $B$  del mismo orden? Responda razonadamente utilizando las propiedades generales de las operaciones entre matrices, sin utilizar matrices  $A$  y  $B$  concretas.

### Ejercicio 4

OPCIÓN B 2 puntos

Un rectángulo está inscrito en el triángulo que tiene los lados en las rectas de ecuaciones

$$y = x, \quad x + y = 8, \quad y = 0,$$

y tiene un lado sobre la recta  $y = 0$ . Halle sus vértices para que la superficie sea máxima.

## Ejercicio 5

OPCIÓN A 2 puntos

Un triángulo equilátero de vértices  $A$ ,  $B$  y  $C$  tiene los lados de 8 cm. Situamos un punto  $P$  sobre una de las alturas del triángulo, a una distancia  $x$  de la base correspondiente.

a) 0,5 puntos

Calcule la altura del triángulo de vértices  $A$ ,  $B$  y  $C$ .

b) 0,5 puntos

Indique la distancia del punto  $P$  a cada uno de los vértices (en función de  $x$ ).

c) 1 punto

Determine el valor de  $x$  para que la suma de los cuadrados de las distancias del punto  $P$  a cada uno de los tres vértices sea mínima.

## Ejercicio 5

OPCIÓN B 2 puntos

Conteste a las preguntas siguientes:

a) 1 punto

Explique razonadamente si una matriz de orden 3 y una matriz de orden 2 pueden tener el mismo determinante.

b) 1 punto

Considere las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & p \\ 1 & 1-p & 2 \\ 1 & 2 & p \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & p \\ 0 & p & 4 \end{pmatrix}$$

Calcule, si es posible, el valor del parámetro  $p$  para que  $\det A = \det B$ .

## Ejercicio 6

OPCIÓN A 2 puntos

Dados los puntos  $P = (1, 0, 0)$ ,  $Q = (0, 2, 0)$ ,  $R = (0, 0, 3)$  y  $S = (1, 2, 3)$ :

a) 1 punto

Calcule la ecuación cartesiana (es decir, de la forma  $Ax + By + Cz + D = 0$ ) del plano que contiene los puntos  $P$ ,  $Q$  y  $R$ .

b) 1 punto

Compruebe si los cuatro puntos son coplanarios (es decir, si los cuatro están contenidos en un mismo plano).

## Ejercicio 6

OPCIÓN B 2 puntos

Sean  $\pi : x - 3y + 2z = 1$  y  $r : \begin{cases} 3x + y = 1 \\ 2x - y + mz = 1 \end{cases}$ . Estudie su posición relativa según el valor del parámetro  $m$ .