

Modelo UA5 de 2014

Soluciones desarrolladas · PAU Andalucía

Opción A · Ejercicio 1

Usando los desarrollos de Taylor en 0, $\tan x = x + x^3/3 + o(x^3)$ y $\sin x = x - x^3/6 + o(x^3)$. Por ello, el numerador es $x^3/2 + o(x^3)$ y el denominador $x^3/6 + o(x^3)$. El límite vale $\boxed{3}$.

Opción A · Ejercicio 2

La recta tangente tiene pendiente -1 . Como $f'(x) = 3x^2 - 6x - 1$, igualamos $f'(x) = -1$ y obtenemos $x = 0$ o 2 . Solo $x = 0$ pertenece a la recta: $f(0) = 3$, que da el punto $(0, 3)$. La diferencia entre la recta $y = 3 - x$ y la curva es

$$(3 - x) - f(x) = -x^2(x - 3).$$

Entre sus intersecciones 0 y 3 esta diferencia es no negativa, así que

$$A = \int_0^3 x^2(3 - x)dx = \boxed{\frac{27}{4}}.$$

Opción A · Ejercicio 3

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & \lambda + 1 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \lambda & \lambda + 1 & \lambda \\ \lambda & 0 & 1 & \lambda \\ 1 & 0 & \lambda & \lambda \end{array} \right), \quad \det A = -\lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1).$$

Si $\lambda \neq -1, 0, 1$, es SCD. Para $\lambda = -1$, el menor de las dos primeras filas y columnas es $-1 \neq 0$, luego $\text{rg } A = 2$. La suma de las filas segunda y tercera anula los coeficientes, pero suma los términos independientes a $-2 \neq 0$; por tanto $\text{rg } A^* = 3$ y el sistema es SI. Para $\lambda = 0$, las filas primera y segunda coinciden y un menor de orden dos vale $-1 \neq 0$, así que $\text{rg } A = \text{rg } A^* = 2 < 3$. Para $\lambda = 1$, las filas segunda y tercera coinciden en coeficientes y términos independientes, y un menor de orden dos vale $-1 \neq 0$; de nuevo $\text{rg } A = \text{rg } A^* = 2 < 3$. En estos dos casos hay infinitas soluciones (SCI). Cuando $\lambda = 1$, la primera ecuación da $y + 2z = 1$ y las otras $x + z = 1$, de modo que

$$(x, y, z) = (1 - t, 1 - 2t, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para $\lambda = 0$, las soluciones son $(0, t, 0)$; por ejemplo, tres soluciones distintas son $\boxed{(0, 0, 0), (0, 1, 0), (0, -1, 0)}$.

Opción A · Ejercicio 4

a) $\overrightarrow{AB} = B - A = (3 - (-3), 6 - 4, 3 - 0) = (6, 2, 3)$ y $\overrightarrow{AC} = C - A = (-1 - (-3), 2 - 4, 1 - 0) = (2, -2, 1)$. Un normal al plano es el producto vectorial:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (8, 0, -16) \sim (1, 0, -2).$$

Al usar $A = (-3, 4, 0)$ se obtiene $\boxed{\pi : x - 2z + 3 = 0}$.

b) La recta perpendicular tiene dirección normal $(1, 0, -2)$ y pasa por el origen:

$$(x, y, z) = t(1, 0, -2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

c) El área del triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial de dos lados:

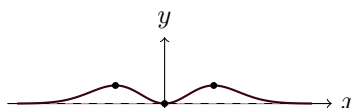
$$A = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \boxed{4\sqrt{5}}.$$

Opción B · Ejercicio 1

El dominio es todo $\mathbb{R}$. Derivando,

$$f'(x) = 2x(1 - x^2)e^{-x^2}.$$

Como la exponencial es positiva, los puntos críticos son $-1, 0, 1$. El signo de la derivada da crecimiento en $(-\infty, -1)$ y $(0, 1)$, y decrecimiento en $(-1, 0)$ y $(1, +\infty)$. Hay máximos en $x = \pm 1$, con valor $1/e$, y mínimo en $x = 0$, con valor 0 . Además, $f(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$, de modo que $y = 0$ es asíntota horizontal en ambos extremos; no hay asíntotas verticales. La función es par, y estos datos determinan el esbozo:



Opción B · Ejercicio 2

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x+9}{(x+1)(x-3)} = -\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-3}.$$

Como el dominio es $(-1, 3)$, una primitiva es $F(x) = -2\ln(x+1) + 3\ln(3-x) + C$. La condición $F(1) = 0$ da $C = -\ln 2$. Por tanto,

$$F(x) = -2\ln(x+1) + 3\ln(3-x) - \ln 2.$$

Opción B · Ejercicio 3

a) $\det A = -m^2$, así que A es invertible si $m \neq 0$; en particular,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad (m=1).$$

b) Para $m=1$, la ecuación $A^{-1}XA = B - A$ equivale, al multiplicar por A a la izquierda, a $X = A(B - A)A^{-1}$. Calculando las matrices por separado,

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Opción B · Ejercicio 4

La recta tiene punto $R = (-1, 2, 1)$ y dirección $d = (2, 1, 3)$. El plano perpendicular a la recta tiene normal d y pasa por $A = (8, -1, 3)$:

$$2(x-8) + (y+1) + 3(z-3) = 0 \implies 2x + y + 3z - 24 = 0.$$

Para hallar el simétrico, proyectamos A sobre r . Si $H = R + td$, la condición $(A - H) \cdot d = 0$ da $t = 3/2$, y $H = (2, 7/2, 11/2)$. Reflejando respecto de H ,

$$A' = 2H - A = (-4, 8, 8).$$