

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

Julio de 2024 · Convocatoria extraordinaria

Se resuelven los seis problemas para ofrecer una propuesta completa.

Problema 1 · Producción de bolígrafos

Sean x e y las unidades diarias de bolígrafos sencillos y sofisticados. La tinta, el plástico y el límite de producción del modelo sencillo imponen

$$x + y \leq 2500, \quad x + \frac{3}{2}y \leq 3000, \quad x \leq 2000, \quad x, y \geq 0.$$

La ganancia es $G(x, y) = 0,5x + 0,7y$. Al ser lineal, su máximo en esta región se alcanza en un vértice. Las intersecciones factibles son $(0, 0)$, $(2000, 0)$, $(2000, 500)$, $(1500, 1000)$ y $(0, 2000)$. Evaluamos:

(x, y)	$(0, 0)$	$(2000, 0)$	$(2000, 500)$	$(1500, 1000)$	$(0, 2000)$
$G(x, y)$	0	1000	1350	1450	1400

El vértice $(1500, 1000)$ proporciona la mayor ganancia y sus coordenadas son enteras, como requiere el recuento de bolígrafos.

Producir 1500 bolígrafos sencillos y 1000 sofisticados; $G_{\max} = 1450$ € diarios.

Problema 2 · Productos e igualdades de matrices

Las matrices son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) El producto AB es posible y tiene orden 3:

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}, \quad AB - 2I = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Calculamos el determinante, por ejemplo desarrollando por la segunda fila:

$$\det(AB - 2I) = -3 \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 30 \neq 0.$$

Por tanto, la matriz es invertible.

b) En $A + 2XC = B^T$, aislamos X y calculamos C^{-1} :

$$X = \frac{1}{2}(B^T - A)C^{-1}, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Como

$$B^T - A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

resulta

$$X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

c) Para que $CD = DC$, calculamos ambos productos:

$$CD = \begin{pmatrix} 2 & z-3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad DC = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ z-3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Igualar las entradas correspondientes exige $z - 3 = 1$, así que $z = 4$; con ese valor también coincide la otra entrada no diagonal.

$$\det(AB - 2I) = 30; \quad X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \quad z = 4.$$

Problema 3 · Estudio de una función racional

La función es $f(x) = \frac{1}{(3x^2 - 1)^2}$.

a) El denominador se anula cuando $3x^2 - 1 = 0$, es decir, en $x = \pm 1/\sqrt{3}$. Por tanto,

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}.$$

La función es siempre positiva y no corta el eje X . Como $f(0) = 1$, el corte con el eje Y es $(0, 1)$.

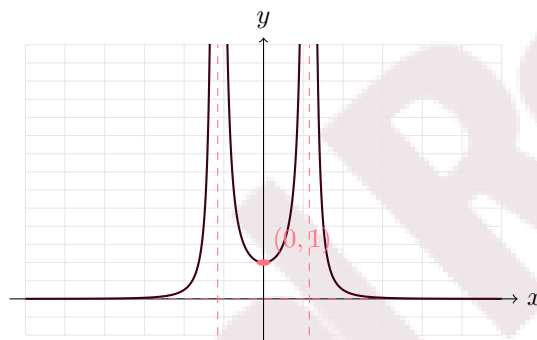
b) En ambos valores excluidos el denominador tiende a cero por valores positivos, así que $f(x) \rightarrow +\infty$ por los dos lados: son asíntotas verticales. Cuando $x \rightarrow \pm\infty$, $f(x) \rightarrow 0$, de modo que $y = 0$ es la asíntota horizontal.

c) y d) La derivada sirve para determinar dónde crece y decrece:

$$f'(x) = -\frac{12x}{(3x^2 - 1)^3}.$$

Separamos la recta en $-1/\sqrt{3}$, 0 y $1/\sqrt{3}$. El signo de f' es positivo en $(-\infty, -1/\sqrt{3})$ y $(-1/\sqrt{3}, 0)$, y negativo en $(0, 1/\sqrt{3})$ y $(1/\sqrt{3}, +\infty)$. Así, hay un máximo local en $x = 0$, con $f(0) = 1$; no hay mínimo local.

e) La gráfica es simétrica respecto del eje Y y reúne los cortes y las asíntotas:



$\text{Dom } f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1/\sqrt{3}\};$	$\text{AV: } x = \pm 1/\sqrt{3},$	$\text{AH: } y = 0;$	$\max_{\text{loc}} f = (0, 1).$
--	-----------------------------------	----------------------	---------------------------------

Problema 4 · Ingresos y beneficios de un agricultor

La cantidad de abono debe cumplir $x \geq 0$. Los ingresos son $I(x) = -x^2 + 60x + 100$.

a) Como es una parábola cóncava, el máximo se alcanza en el vértice. Derivando,

$$I'(x) = -2x + 60 = 0 \implies x = 30.$$

Los ingresos máximos son $I(30) = -900 + 1800 + 100 = 1000$ €.

b) El beneficio es el ingreso menos el coste del abono:

$$B(x) = I(x) - 12x = -x^2 + 48x + 100.$$

Su derivada se anula en $x = 24$ y cambia de positiva a negativa, así que ahí está el máximo:

$$B(24) = -24^2 + 48(24) + 100 = 676 \text{ €}.$$

c) Para obtener beneficio positivo resolvemos $B(x) > 0$. Las raíces son

$$-x^2 + 48x + 100 = 0 \implies x^2 - 48x - 100 = 0 \implies x = -2, 50.$$

La parábola abre hacia abajo; con $x \geq 0$, el beneficio es positivo para $0 \leq x < 50$ kg (si se exige aplicar abono, $0 < x < 50$).

$I_{\text{max}} = 1000 \text{ € en } x = 30 \text{ kg};$	$B_{\text{max}} = 676 \text{ € en } x = 24 \text{ kg};$	$B(x) > 0 \text{ para } 0 \leq x < 50.$
--	---	---

Problema 5 · Estudiantes y actividades extraescolares

De los 310 estudiantes de ESO, 230 eligen fútbol y 60 baloncesto; por tanto, 20 eligen música. Hay $400 - 310 = 90$ estudiantes de Bachillerato, de los que 8 eligen música. Así, música la eligen 28 estudiantes.

a) Sean E «está en ESO» y M «ha escogido música». Usamos la fórmula de la unión:

$$P(E \cup M) = \frac{310 + 28 - 20}{400} = \frac{159}{200}.$$

b) Una actividad deportiva es fútbol o baloncesto. Hay $400 - 28 = 372$ estudiantes en estas actividades, 290 de ellos en ESO. Luego

$$P(E \mid \text{deporte}) = \frac{290}{372} = \frac{145}{186}.$$

c) En Bachillerato hay $90 - 70 = 20$ estudiantes que no han escogido fútbol, de los que 8 hacen música; por tanto, 12 hacen baloncesto. El total de baloncesto es $60 + 12 = 72$, así que 328 estudiantes no lo han escogido. Además, 78 estudiantes de Bachillerato no escogieron baloncesto (70 en fútbol y 8 en música). Comparamos

$$P(\text{Bachillerato} \cap \text{no baloncesto}) = \frac{78}{400} = \frac{39}{200} \quad \text{con} \quad P(\text{Bachillerato})P(\text{no baloncesto}) = \frac{90}{400} \frac{328}{400} = \frac{369}{2000}.$$

No son iguales, por lo que los sucesos no son independientes.

$$P(E \cup M) = \frac{159}{200}; \quad P(E \mid \text{deporte}) = \frac{145}{186}; \quad \text{Bachillerato y no baloncesto no son independientes.}$$

Problema 6 · Efectividad de vacunas

De las 600 reses, 250 recibieron el método A, 250 el método B y 100 no se vacunaron. Los casos de problemas respiratorios esperados son 75, 50 y 60, respectivamente.

a) Sumamos los casos de los tres grupos:

$$P(R) = \frac{250}{600}(0,30) + \frac{250}{600}(0,20) + \frac{100}{600}(0,60) = \frac{185}{600} = \frac{37}{120}.$$

b) Sin problemas respiratorios hay 175 reses del grupo A, 200 del B y 40 sin vacunar: 415 en total. Así,

$$P(B \mid R^c) = \frac{200}{415} = \frac{40}{83}.$$

c) La intersección «no vacunada y con problemas» contiene 60 de las 600 reses:

$$P(\text{no vacunada} \cap R) = \frac{60}{600} = \frac{1}{10}.$$

$$P(R) = \frac{37}{120}; \quad P(B \mid R^c) = \frac{40}{83}; \quad P(\text{no vacunada} \cap R) = \frac{1}{10}.$$