

PAU Madrid - Matemáticas II

Convocatoria de septiembre de 2014

Se desarrollan razonadamente las dos opciones del examen.

Opción A - Ejercicio 1. Dominio, asíntotas y extremos

La función es

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+4}.$$

Los denominadores no pueden anularse, así que $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4, -1\}$. En $x = -4$ el segundo sumando diverge y el primero permanece finito; en $x = -1$ ocurre lo mismo con el primer sumando. Por tanto, ambas rectas son asíntotas verticales. Al reducir a una fracción,

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{(x+1)(x+4)},$$

y numerador y denominador tienen el mismo grado y el cociente de sus coeficientes principales es 1. La asíntota horizontal en $+\infty$ y $-\infty$ es $y = 1$; al existir horizontal, no hay una oblicua adicional.

Para hallar los extremos, derivamos y buscamos los puntos críticos dentro del dominio:

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{4}{(x+4)^2} = \frac{3(x-2)(x+2)}{(x+1)^2(x+4)^2}.$$

El denominador es positivo donde la función está definida. La derivada se anula en $x = -2$ y $x = 2$; también tenemos que separar los intervalos en los puntos excluidos -4 y -1 . El signo de $(x-2)(x+2)$ da crecimiento en $(-\infty, -4)$, $(-4, -2)$ y $(2, +\infty)$, y decrecimiento en $(-2, -1)$ y $(-1, 2)$. Así, en $x = -2$ hay un máximo relativo y en $x = 2$ un mínimo relativo:

$$f(-2) = -2, \quad f(2) = \frac{2}{3}.$$

Conclusión. El dominio es $\mathbb{R} \setminus \{-4, -1\}$; las asíntotas son $x = -4$, $x = -1$ y $y = 1$; hay un máximo relativo $(-2, -2)$ y un mínimo relativo $(2, \frac{2}{3})$.

c) Integral entre 0 y 1. Separamos el segundo sumando como $\frac{x}{x+4} = 1 - \frac{4}{x+4}$:

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} + 1 - \frac{4}{x+4} \right) dx = [\ln(x+1) + x - 4 \ln(x+4)]_0^1.$$

Al evaluar los extremos,

$$\int_0^1 f(x) dx = \ln 2 + 1 - 4 \ln 5 + 4 \ln 4 = 1 + \ln 2 + 4 \ln \frac{4}{5}.$$

Conclusión. La integral vale $1 + \ln 2 + 4 \ln \frac{4}{5}$.

Opción A - Ejercicio 2. Inversa y sistemas matriciales

La matriz es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 1 & a & 1 \\ a-1 & a & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Una matriz cuadrada es invertible exactamente cuando su determinante no se anula. El cálculo da

$$\det A = -a(a-1)(a-2).$$

Conclusión. No existe A^{-1} para $a = 0$, $a = 1$ o $a = 2$.

b) Inversa para $a = -2$. Sustituimos el parámetro:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \det A = 24.$$

Como el determinante es no nulo, existe la inversa. Calculando la adjunta,

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} -2 & 8 & -6 \\ -5 & -4 & -3 \\ -8 & 8 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{24} \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{12} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{5}{24} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Conclusión. La matriz inversa es la indicada.

Opción A - Ejercicio 3. Área y volumen en el espacio

Calculamos dos vectores del triángulo:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1, -4, 1), \quad \overrightarrow{AC} = C - A = (3, 4, -1).$$

a) **Área del triángulo ABC.** El área es la mitad del módulo del producto vectorial de dos lados que salen del mismo vértice:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (0, 4, 16), \quad A = \frac{1}{2} \sqrt{0^2 + 4^2 + 16^2} = 2\sqrt{17}.$$

Conclusión. El área es $2\sqrt{17}$ unidades cuadradas.

b) **Volumen del tetraedro ABCD.** Desde A formamos además

$$\overrightarrow{AD} = D - A = (-2, 1, 6).$$

El volumen es un sexto del valor absoluto del producto mixto:

$$V = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{6} |(0, 4, 16) \cdot (-2, 1, 6)| = \frac{100}{6} = \frac{50}{3}.$$

Conclusión. El volumen es $\frac{50}{3}$ unidades cúbicas.

Opción A - Ejercicio 4. Intersección de planos y ángulo

a) **Recta intersección de π_1 y π_2 .** Resolviendo el sistema $2x + z = 1$, $x + z = -2$, restamos la segunda ecuación de la primera y obtenemos $x = 3$. Entonces $z = -5$, mientras que y queda libre. La recta, en forma paramétrica, es

$$\begin{cases} x = 3, \\ y = t, \\ z = -5, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

b) **Seno del ángulo entre la recta y π_3 .** La recta tiene vector director $\vec{d} = (0, 1, 0)$ y el plano π_3 tiene normal $\vec{n}_3 = (1, 3, 2)$. El seno del ángulo entre una recta y un plano es el valor absoluto del coseno del ángulo entre el vector director y la normal:

$$\sin \theta = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}_3|}{\|\vec{d}\| \|\vec{n}_3\|} = \frac{3}{\sqrt{14}}.$$

Conclusión. El seno del ángulo es $\frac{3}{\sqrt{14}}$.

Opción B - Ejercicio 1. Posición relativa y simetría

La recta está en forma paramétrica y tiene vector director $\vec{d} = (-2, -2, 1)$. El plano tiene normal $\vec{n} = (2, -1, 2)$. Como $\vec{d} \cdot \vec{n} = -4 + 2 + 2 = 0$, la recta es paralela al plano o está contenida en él. Probamos el punto $R_0 = (1, 2, 1)$ de la recta en la ecuación del plano:

$$2(1) - 2 + 2(1) + 3 = 5 \neq 0.$$

Por tanto, no está contenida y es paralela disjunta. La distancia entre una recta paralela y un plano es la distancia de cualquier punto de la recta al plano:

$$d(r, \pi) = \frac{|2(1) - 2 + 2(1) + 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{5}{3}.$$

Conclusión. La recta es paralela disjunta al plano y la distancia entre ellos es $\frac{5}{3}$.

Para reflejar $P = (3, 2, 1)$ respecto al plano $2x - y + 2z + 3 = 0$, calculamos el valor del miembro izquierdo en P: es 9. La reflexión se obtiene con

$$P' = P - 2 \frac{9}{2^2 + (-1)^2 + 2^2} (2, -1, 2) = (3, 2, 1) - 2(2, -1, 2) = (-1, 4, -3).$$

Conclusión. El punto simétrico es $P' = (-1, 4, -3)$.

Opción B - Ejercicio 2. Continuidad y derivabilidad

En $x = 0$, el límite por la izquierda es

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{5 \sin x}{2x} + \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3,$$

y el límite por la derecha también es $\lim_{x \rightarrow 0^+} (xe^x + 3) = 3$. Por tanto, la función es continua si y solo si $a = 3$.

Para $x < 0$, derivamos el cociente $\sin x/x$; para $x > 0$, derivamos $xe^x + 3$:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{5}{2} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}, & x < 0, \\ e^x(x+1), & x > 0. \end{cases}$$

La derivada lateral izquierda en cero vale 0: tras aplicar L'Hôpital al cociente $(x \cos x - \sin x)/x^2$, el límite es el de $-\sin x/(2)$, que tiende a cero. La derivada lateral derecha vale 1. Si $a \neq 3$, hay discontinuidad; si $a = 3$, las derivadas laterales no coinciden. En ninguno de los casos la función es derivable en cero.

c) Integral. En $[1, \ln 5]$ se usa la rama $xe^x + 3$. Una primitiva es $(x-1)e^x + 3x$, así que

$$\int_1^{\ln 5} f(x) dx = [(x-1)e^x + 3x]_1^{\ln 5} = 8 \ln 5 - 8.$$

Conclusión. La función es continua solo si $a = 3$, no es derivable en 0 para ningún a y la integral vale $8(\ln 5 - 1)$.

Opción B - Ejercicio 3. Ecuación matricial

Sea $C = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$. La ecuación $CB = J$, con J la matriz cuyos elementos valen 1, tiene solución única si C es invertible. Su determinante es $7a - 6$. Si $a = \frac{6}{7}$, la segunda fila de C es $\frac{7}{2}$ veces la primera, pero la segunda fila de J no es $\frac{7}{2}$ veces la primera; por tanto, en ese caso no hay solución. **Conclusión.** La ecuación tiene solución exactamente cuando $a \neq \frac{6}{7}$.

Para $a = 1$,

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = C^{-1}J = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Conclusión. Para $a = 1$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Opción B - Ejercicio 4. Rango de una matriz

La matriz es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & a \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -4 & a \end{pmatrix}.$$

Su determinante vale $-2(a-6)$. Si $a \neq 6$, el determinante no se anula y el rango es 4. Si $a = 6$, el determinante se anula, de modo que el rango es menor que 4. El menor de orden tres formado por las tres primeras filas y columnas es

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0,$$

por lo que el rango es al menos 3 en ese caso y, por tanto, exactamente 3. **Conclusión.** $\text{rg}(A) = 4$ si $a \neq 6$ y $\text{rg}(A) = 3$ si $a = 6$.