

PAU Madrid - Matemáticas II

Modelo de examen de 2023

Se desarrollan las ocho preguntas del modelo orientativo.

Pregunta A.1 - Sistema de jugadores

Cada uno de los veinte equipos tiene 25 jugadores, de los cuales exactamente 3 son porteros. Por tanto, en toda la liga hay $20 \cdot 25 = 500$ jugadores y $500 - 20 \cdot 3 = 440$ jugadores de campo.

Sean x, y, z los números de defensas, centrocampistas y delanteros en toda la liga. Las tres condiciones del enunciado se traducen en

$$\begin{cases} x + y + z = 440, \\ \frac{x}{3} = y - z, \\ \frac{y}{2} + 2z = x + 25. \end{cases}$$

La segunda ecuación equivale a $x - 3y + 3z = 0$, y multiplicamos la tercera por 2 para evitar fracciones. De la segunda, $x = 3y - 3z$. Sustituyendo en el total:

$$4y - 2z = 440 \implies 2y - z = 220.$$

Al sustituir en la tercera ecuación transformada:

$$-2(3y - 3z) + y + 4z = 50 \implies -y + 2z = 10.$$

Multiplicamos esta última igualdad por 2 y la sumamos a $2y - z = 220$; así, $3z = 240$, de donde $z = 80$. Entonces $y = 150$ y $x = 210$. **Conclusión.** En la liga hay 210 defensas, 150 centrocampistas y 80 delanteros.

Pregunta A.2 - Continuidad, asíntotas, derivada e integral

La función está definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e(x-1)}{e^x - e}, & x < 1, \\ \frac{1}{4x-3}, & x \geq 1. \end{cases}$$

En el primer tramo, $e^x - e \neq 0$ si $x < 1$; en el segundo, $4x - 3 > 0$ si $x \geq 1$. Por tanto, el dominio es $\mathbb{R}$.

a) Continuidad y asíntotas

Cada expresión es continua en su tramo. En $x = 1$, calculamos el límite por la izquierda y el valor y límite por la derecha:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e(x-1)}{e^x - e} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e}{e^x} = 1, \quad f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{4x-3} = 1.$$

Los límites laterales coinciden con $f(1)$, así que f es continua también en $x = 1$.

Cuando $x \rightarrow +\infty$, usamos el segundo tramo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4x-3} = 0.$$

Hay una asíntota horizontal $y = 0$ por la derecha. Para $x \rightarrow -\infty$, estudiamos una posible asíntota oblicua. Su pendiente es

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e(x-1)}{x(e^x - e)} = -1.$$

La ordenada en el origen es

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e(x-1)}{e^x - e} + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^x - e}{e^x - e} = 1.$$

Conclusión. f es continua en $\mathbb{R}$; sus asíntotas son $y = 0$ cuando $x \rightarrow +\infty$ y $y = -x + 1$ cuando $x \rightarrow -\infty$.

b) Cálculo de $g'(0)$

Como $0 < 1$, cerca de 0 se usa la primera expresión de f . Al multiplicar,

$$g(x) = (e^x - e)f(x) = e(x - 1),$$

de donde $g'(x) = e$ en ese tramo. **Conclusión.** $g'(0) = e$.

c) Integral

En $[1, 5]$ se utiliza $f(x) = \frac{1}{4x-3}$. Hacemos el cambio $u = 4x - 3$, por lo que $du = 4 dx$:

$$\int_1^5 \sqrt{f(x)} dx = \int_1^5 (4x - 3)^{-1/2} dx = \frac{1}{4} \int_1^{17} u^{-1/2} du = \frac{1}{2} [\sqrt{u}]_1^{17} = \frac{\sqrt{17} - 1}{2}.$$

Conclusión. La integral vale $\frac{\sqrt{17}-1}{2}$.

Pregunta A.3 - Depósito en forma de paralelepípedo

a) Plano que contiene a AB y AA'

Obtenemos los vectores a partir de las coordenadas:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1, 3, 1) - (1, 1, 1) = (0, 2, 0), \quad \overrightarrow{AA'} = A' - A = (1, 1, 6) - (1, 1, 1) = (0, 0, 5).$$

Su producto vectorial es un vector normal al plano:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AA'} = (0, 2, 0) \times (0, 0, 5) = (10, 0, 0).$$

El plano pasa por $A = (1, 1, 1)$, así que su ecuación general es $10(x - 1) = 0$. **Conclusión.** Una ecuación del plano que contiene AB y AA' es $x - 1 = 0$.

b) Vértices C y D de la base

La base es un cuadrado y $|AB| = 2$. El vector normal a la rampa $4x - 3z = 1$ es $\vec{n} = (4, 0, -3)$. La dirección de los lados BC y AD debe ser perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ y estar contenida en la rampa; para ello tomamos $\vec{n} \times \overrightarrow{AB}$:

$$(4, 0, -3) \times (0, 2, 0) = (6, 0, 8).$$

Su módulo es 10, luego el vector unitario correspondiente es $(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5})$. Multiplicando por la longitud del lado 2, y eligiendo la orientación hacia los semiejes positivos, obtenemos

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = 2 \left(\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5} \right) = \left(\frac{6}{5}, 0, \frac{8}{5} \right).$$

Sumamos este vector a los puntos A y B :

$$D = A + \overrightarrow{AD} = (1, 1, 1) + \left(\frac{6}{5}, 0, \frac{8}{5} \right) = \left(\frac{11}{5}, 1, \frac{13}{5} \right),$$

$$C = B + \overrightarrow{BC} = (1, 3, 1) + \left(\frac{6}{5}, 0, \frac{8}{5} \right) = \left(\frac{11}{5}, 3, \frac{13}{5} \right).$$

Conclusión. Los otros vértices de la base son $C = (\frac{11}{5}, 3, \frac{13}{5})$ y $D = (\frac{11}{5}, 1, \frac{13}{5})$.

c) Volumen

El volumen del paralelepípedo es el valor absoluto del producto mixto de tres aristas concurrentes:

$$V = \left| \overrightarrow{AA'} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}) \right|.$$

Calculamos el producto vectorial:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = (0, 2, 0) \times \left(\frac{6}{5}, 0, \frac{8}{5} \right) = \left(\frac{16}{5}, 0, -\frac{12}{5} \right).$$

Entonces

$$V = \left| (0, 0, 5) \cdot \left(\frac{16}{5}, 0, -\frac{12}{5} \right) \right| = |-12| = 12.$$

Conclusión. El volumen del depósito es 12 unidades cúbicas.

Pregunta A.4 - Distribución normal

Sea $X \sim N(100, 35)$, con media $\mu = 100$ y desviación típica $\sigma = 35$. Estandarizamos mediante $Z = \frac{X-100}{35}$, donde $Z \sim N(0, 1)$.

a) Puntuación entre 100 y 140

Los valores tipificados son 0 y $\frac{140-100}{35} \approx 1,14$. Consultando la tabla:

$$P(100 < X < 140) = P(0 < Z < 1,14) = \Phi(1,14) - \Phi(0) = 0,8729 - 0,5 = 0,3729.$$

Conclusión. El 37,29 % de los empleados obtiene una puntuación entre 100 y 140.

b) Puntuación inferior a 95

$$P(X < 95) = P\left(Z < \frac{95 - 100}{35}\right) \approx P(Z < -0,14) = 1 - \Phi(0,14) = 1 - 0,5557 = 0,4443.$$

Conclusión. La probabilidad de obtener menos de 95 puntos es 0,4443.

c) Puntuación mínima para cobrar el incentivo

Buscamos k tal que el 75,17 % de la plantilla obtenga al menos esa puntuación:

$$P(X \geq k) = 0,7517 \implies P\left(Z \geq \frac{k - 100}{35}\right) = 0,7517.$$

La tabla indica $\Phi(0,68) = 0,7517$; por simetría, la cola derecha de probabilidad 0,7517 corresponde a un valor tipificado $-0,68$. Así,

$$\frac{k - 100}{35} = -0,68 \implies k = 76,2.$$

Conclusión. La puntuación mínima es 76,2 puntos.

Pregunta B.1 - Operaciones con matrices

Sean

$$A = \begin{pmatrix} m & -1 & 1 \\ -2 & 0 & m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2m & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Condición $A^T B = C$

Multiplicamos primero:

$$A^T B = \begin{pmatrix} 2m^2 - 2 & -m \\ -2m & 1 \\ 3m & -1 \end{pmatrix}.$$

Igualando, por ejemplo, la entrada (1, 2) con la de C , obtenemos $-m = -1$, luego $m = 1$. Al sustituirlo, todas las demás entradas coinciden con C . **Conclusión.** El único valor que cumple $A^T B = C$ es $m = 1$.

b) Inversa de AC

Calculamos el producto:

$$AC = \begin{pmatrix} 5 & -m-2 \\ 3m & 2-m \end{pmatrix}.$$

Una matriz cuadrada es invertible si y solo si su determinante es distinto de cero:

$$\det(AC) = 5(2-m) - 3m(-m-2) = 3m^2 + m + 10.$$

El discriminante de este trinomio es $1 - 120 = -119 < 0$ y su coeficiente principal es positivo, por lo que el determinante es positivo para todo $m \in \mathbb{R}$. Así, AC siempre tiene inversa.

Para $m = 0$,

$$AC = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \det(AC) = 10.$$

Aplicando la fórmula de la inversa 2×2 :

$$(AC)^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Conclusión. AC es invertible para todo m , y para $m = 0$ su inversa es $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

c) Condición $B^2 = B - I$

Calculamos ambas matrices por separado:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 4m^2 - 1 & -2m \\ 2m & -1 \end{pmatrix}, \quad B - I = \begin{pmatrix} 2m - 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La igualdad de las entradas fuera de la diagonal exige $-2m = -1$, de donde $m = \frac{1}{2}$; con este valor, las entradas de la diagonal también coinciden. **Conclusión.** El valor que cumple $B^2 = B - I$ es $m = \frac{1}{2}$.

Pregunta B.2 - Optimización del huerto

Sea x la longitud mayor del huerto y y la menor, en metros. El área exterior es 72 m^2 , por lo que $xy = 72$ y $y = \frac{72}{x}$.

La zona de hortalizas deja un metro de margen en cada lado corto, así que su longitud es $x - 2$. Deja medio metro en cada lado largo, por lo que su anchura es $y - 1$. Su área, expresada con una sola variable, es

$$H(x) = (x - 2) \left(\frac{72}{x} - 1 \right) = 74 - x - \frac{144}{x}.$$

El dominio físico exige $x > 2$, $\frac{72}{x} > 1$ y $x \geq y$; es decir, $\sqrt{72} \leq x < 72$. Para hallar el máximo, buscamos los puntos críticos:

$$H'(x) = -1 + \frac{144}{x^2} = 0 \implies x^2 = 144.$$

Como $x > 0$, $x = 12$, que pertenece al dominio. Además,

$$H''(x) = -\frac{288}{x^3} < 0 \quad (x > 0),$$

por lo que el área alcanza un máximo en ese punto. La otra dimensión del huerto es $y = \frac{72}{12} = 6$. **Conclusión.** El huerto debe medir 12 m por 6 m para maximizar la zona de hortalizas.

b) Área máxima de hortalizas

Con esas dimensiones, la zona interior mide $12 - 2 = 10 \text{ m}$ por $6 - 1 = 5 \text{ m}$. **Conclusión.** El área máxima para hortalizas es $10 \cdot 5 = 50 \text{ m}^2$.

Pregunta B.3 - Posición relativa, ángulo y proyección

La recta r pasa por $P = (1, 1, 2)$ y tiene vector director $\vec{u} = (0, 1, 2)$, por lo que

$$r: \quad x = 1, \quad y = 1 + t, \quad z = 2 + 2t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para s , de $x - 2z + 2 = 0$ obtenemos $x = 2z - 2$, y de $x + y - 4 = 0$, $y = 6 - 2z$. Tomando $z = \lambda$,

$$s: \quad x = -2 + 2\lambda, \quad y = 6 - 2\lambda, \quad z = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Así, un vector director de s es $\vec{v} = (2, -2, 1)$.

a) Posición relativa de r y s

Los vectores directores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son proporcionales. Para ver si se cortan, igualamos coordenadas:

$$1 = -2 + 2\lambda \implies \lambda = \frac{3}{2}, \quad 1 + t = 6 - 2\lambda \implies t = 2.$$

Con esos valores, la tercera coordenada de r es $2 + 2(2) = 6$, mientras que la de s es $\frac{3}{2}$; no coinciden. Por tanto, no se cortan y tampoco son paralelas. **Conclusión.** Las rectas r y s se cruzan (son alabeadas).

b) Ángulo entre r y s

La recta t , paralela a s , tiene vector director $\vec{v} = (2, -2, 1)$. El ángulo entre rectas se calcula con sus vectores directores:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (0, 1, 2) \cdot (2, -2, 1) = -2 + 2 = 0.$$

Al ser perpendicular el producto escalar nulo, el ángulo es recto. **Conclusión.** Las rectas r y t forman un ángulo de $\frac{\pi}{2}$.

c) Proyección ortogonal de P sobre s

La proyección H pertenece a s , y el vector PH es perpendicular a su dirección $\vec{v}$. Por tanto, podemos intersectar s con el plano perpendicular a $\vec{v}$ que pasa por P :

$$2(x-1) - 2(y-1) + (z-2) = 0 \iff 2x - 2y + z - 2 = 0.$$

Sustituimos la parametrización de s :

$$2(-2+2\lambda) - 2(6-2\lambda) + \lambda - 2 = 0 \implies 9\lambda - 18 = 0 \implies \lambda = 2.$$

Al sustituir en s , $H = (2, 2, 2)$. **Conclusión.** La proyección ortogonal de P sobre s es $(2, 2, 2)$.

Pregunta B.4 - Probabilidad y sucesos complementarios

Los datos son $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$, $P(\bar{A}) = \frac{9}{20}$ y $P(\bar{B}) = \frac{7}{20}$. Por tanto,

$$P(A) = 1 - \frac{9}{20} = \frac{11}{20}, \quad P(B) = 1 - \frac{7}{20} = \frac{13}{20}.$$

a) Probabilidad de $\bar{A} \cap \bar{B}$

Por las leyes de De Morgan, $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$. Así,

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}.$$

Conclusión. $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{1}{5}$.

b) Probabilidad de $\bar{A} \cup \bar{B}$

Primero calculamos la intersección de A y B mediante la fórmula de la unión:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{11}{20} + \frac{13}{20} - \frac{4}{5} = \frac{2}{5}.$$

De Morgan permite expresar $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B}$, luego

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}.$$

Conclusión. $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = \frac{3}{5}$.

c) Probabilidad de $A - B$

La diferencia $A - B$ es el suceso $A \cap \bar{B}$. Al quitar de A la parte que comparte con B ,

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{11}{20} - \frac{2}{5} = \frac{3}{20}.$$

Conclusión. $P(A - B) = \frac{3}{20}$.

d) Independencia

Dos sucesos son independientes si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Aquí

$$P(A)P(B) = \frac{11}{20} \cdot \frac{13}{20} = \frac{143}{400} \neq \frac{2}{5} = P(A \cap B).$$

Conclusión. A y B no son independientes.