

Modelo 3 de 2003

Derivadas, áreas, sistemas matriciales, posiciones relativas y distancias.

Opción A - Ejercicio 1

La derivada es $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$. Como se anula en $x = 1$ sin que haya extremo, el punto estacionario debe ser de inflexión: también se anula $f''(1) = 6 + 2a$. Así, $a = -3$ y, de $f'(1) = 0$, $b = 3$. La condición $f(1) = 1$ da $1 - 3 + 3 + c = 1$, luego $c = 0$. Se comprueba que $f'(x) = 3(x - 1)^2$, que no cambia de signo, como exige que no haya extremo. Por tanto,

$$a = -3, \quad b = 3, \quad c = 0.$$

Opción A - Ejercicio 2

La derivada de $f(x) = x^2 - 2x + 2$ es $f'(x) = 2x - 2$. En $x = 3$, el punto es $(3, 5)$ y la pendiente vale 4; la tangente es

$$y - 5 = 4(x - 3) \implies y = 4x - 7.$$

La parábola es convexa, por lo que queda por encima de la tangente. El recinto entre ellas y el eje OY corresponde a $0 \leq x \leq 3$. Su área es

$$S = \int_0^3 ((x^2 - 2x + 2) - (4x - 7)) dx = \int_0^3 (x - 3)^2 dx = 9.$$

Opción A - Ejercicio 3

El determinante de A vale 1, así que la ecuación matricial tiene solución única. Además, $(BA^t)^t = AB^t$. Calculamos

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 17 & 6 & -1 \end{pmatrix}, \quad (BA^t)^t = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 6 \\ -15 & 5 & -14 \\ -8 & -5 & 21 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$X = A^{-1}(BA^t)^t = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Opción A - Ejercicio 4

La recta r tiene vector director

$$d = (1, 1, 1) \times (2, -2, 1) = (3, 1, -4).$$

La ecuación del plano que contiene a r puede escribirse como combinación lineal de los dos planos que la definen. Para que pase por $P = (-2, 3, 0)$, los residuos de ambos planos en P son 3 y -9 , respectivamente; por tanto, tomamos tres veces la primera ecuación más la segunda:

$$3(x + y + z + 2) + (2x - 2y + z + 1) = 0 \implies 5x + y + 4z + 7 = 0.$$

Para hallar el punto de r más cercano a P , intersectamos r con el plano perpendicular a r que pasa por P . Su normal es d , así que dicho plano es $3(x + 2) + (y - 3) - 4z = 0$. Tomando $Q = (-5/4, -3/4, 0)$ en r , la recta queda $Q + t(3, 1, -4)$. Al sustituir en el plano se obtiene $t = 3/52$, de donde

$$H = \left(-\frac{14}{13}, -\frac{9}{13}, -\frac{3}{13} \right).$$

Opción B - Ejercicio 1

Integramos por tramos. Para $0 < x \leq 2$,

$$f(x) = \int (x-1)dx = \frac{x^2}{2} - x + C_1.$$

Como $f(1) = 0$, $C_1 = 1/2$, así que $f(2) = 1/2$. Para $2 < x < 3$,

$$f(x) = \int (-x+3)dx = -\frac{x^2}{2} + 3x + C_2.$$

La función es derivable en todo su dominio, por lo que es continua en $x = 2$; imponiendo $f(2) = 1/2$ resulta $C_2 = -7/2$. La expresión es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2}, & 0 < x \leq 2, \\ -\frac{x^2}{2} + 3x - \frac{7}{2}, & 2 < x < 3. \end{cases}$$

Opción B - Ejercicio 2

La continuidad en $x = a$ exige que los dos valores coincidan:

$$|2 - a| = a^2 - 5a + 7.$$

Si $a \leq 2$, queda $a^2 - 4a + 5 = 0$, que no tiene soluciones reales. Si $a > 2$, resulta $(a-3)^2 = 0$, luego $a = 3$. Para $x < 3$, la primera rama es $|2 - x|$; se separa en $x < 2$ y $2 < x < 3$. Para $x \geq 3$ se usa la rama polinómica. Por tanto,

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & x < 2, \\ 1, & 2 < x \leq 3, \\ 2x - 5, & x > 3. \end{cases}$$

En $x = 2$ hay un vértice y las derivadas laterales no coinciden, así que $f'(2)$ no existe. En $x = 3$, las derivadas laterales valen 1, por lo que sí es derivable. **Opción B - Ejercicio 3**

El determinante de A es

$$\det A = -(m-1)(m+1).$$

La matriz es invertible cuando el determinante no se anula, es decir, para $m \neq \pm 1$. Para $m = 2$,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & -1 \\ 2/3 & -2/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Opción B - Ejercicio 4

La recta r tiene forma paramétrica $(x, y, z) = (t, t, 0)$ y está contenida en el plano $x - y = 0$. Por tanto, la recta pertenece al plano $x - y = 0$. Buscamos $A = (t, t, 0)$ para que el ángulo ABC sea recto. Los vectores con origen en B deben ser perpendiculares:

$$\overrightarrow{BA} = (t-4, t-4, -4), \quad \overrightarrow{BC} = (-4, -4, -4).$$

La condición $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ da $-8t + 48 = 0$, luego $t = 6$. Así,

$$A = (6, 6, 0).$$