

El examen ofrece dos opciones; se desarrollan las dos para repasar todos sus ejercicios.

Opción A - Ejercicio 1

Sea x el lado de la base cuadrada y h la altura del depósito, ambas en metros. Al ser abierto, la chapa cubre una base y cuatro paredes, con área

$$S = x^2 + 4xh.$$

La capacidad impone $x^2h = 13.5$, por lo que $h = 13.5/x^2$ y basta minimizar

$$S(x) = x^2 + \frac{54}{x}, \quad x > 0.$$

Derivamos para hallar el punto crítico:

$$S'(x) = 2x - \frac{54}{x^2} = 0 \iff x^3 = 27 \implies x = 3 \text{ m.}$$

Como $S''(x) = 2 + 108/x^3 > 0$, es un mínimo. La altura correspondiente es

$$h = \frac{13.5}{3^2} = 1.5 \text{ m.}$$

Así, las dimensiones que minimizan la chapa son 3 m $\times$ 3 m de base y 1.5 m de altura.

Opción A - Ejercicio 2

Factorizamos el denominador y descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{-x^2}{x^2 + x - 2} = -1 + \frac{x - 2}{(x + 2)(x - 1)} = -1 + \frac{4}{3(x + 2)} - \frac{1}{3(x - 1)}.$$

Integramos término a término. Como el integrando no está definido en $x = -2$ ni en $x = 1$, la primitiva se considera en cualquiera de los intervalos del dominio:

$$\int \frac{-x^2}{x^2 + x - 2} dx = -x + \frac{4}{3} \ln |x + 2| - \frac{1}{3} \ln |x - 1| + C.$$

Opción A - Ejercicio 3

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ \lambda & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}, \quad (A_\lambda | b) = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & -1 & -1 \\ \lambda & 0 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & -\lambda & 0 \end{array} \right).$$

El determinante de A_λ es cero para todo λ , de modo que su rango no llega a 3. Sin embargo, el rango siempre es 2: si $\lambda \neq 0$, el menor formado por las dos primeras filas y las dos últimas columnas vale $-\lambda \neq 0$; para $\lambda = 0$, el menor de las filas primera y tercera y las columnas primera y segunda vale -1 .

Además, las filas de los coeficientes verifican

$$-\lambda F_1 + (\lambda - 1)F_2 + \lambda F_3 = 0.$$

La misma combinación en la columna de términos independientes vale λ^2 . Si $\lambda \neq 0$, aparece en la ampliada una fila nula en los coeficientes con término independiente no nulo, por lo que $\text{rg}(A_\lambda | b) = 3 > 2$ y el sistema es incompatible. Para $\lambda = 0$, la segunda ecuación es $0 = 0$ y los rangos son iguales a $2 < 3$, de modo que el sistema es compatible indeterminado.

b) Para $\lambda = 0$, las ecuaciones independientes son $y - z = -1$ y $x + y = 0$. Tomamos $y = t$; entonces $x = -t$ y $z = t + 1$. Todas las soluciones son

$$(x, y, z) = (-t, t, t + 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Opción A - Ejercicio 4

a) Para que los cuatro puntos sean coplanarios, el producto mixto de tres vectores con origen en A debe ser cero. Calculamos

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2 - 0, 1 - 1, 3 - 1) = (2, 0, 2),$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (-1 - 0, 2 - 1, 0 - 1) = (-1, 1, -1), \quad \overrightarrow{AD} = D - A = (2, 0, m - 1).$$

El producto vectorial de los dos primeros es $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-2, 0, 2)$. La coplanaridad exige

$$(-2, 0, 2) \cdot (2, 0, m - 1) = 2m - 6 = 0,$$

por lo que $m = 3$.

b) El plano de simetría de A y B es el plano mediador del segmento AB : pasa por su punto medio y es perpendicular a $\overrightarrow{AB}$. El punto medio es

$$M = \frac{A + B}{2} = (1, 1, 2), \quad \overrightarrow{AB} = (2, 0, 2).$$

Usamos $\overrightarrow{AB}$ como vector normal y M como punto del plano:

$$2(x - 1) + 2(z - 2) = 0 \implies x + z - 3 = 0.$$

c) El área del triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial ya calculado:

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \|(-2, 0, 2)\| = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 4} = \sqrt{2}.$$

Opción B - Ejercicio 1

Para que el límite sea finito, debe anularse el término lineal del numerador: si $b \neq 0$, el numerador se comportaría como bx mientras que $\sin(x^2)$ se comporta como x^2 , y el cociente no tendría límite finito. Por tanto, $b = 0$. Dividimos entonces numerador y denominador por x^2 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + 1 - \cos x}{\sin(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a + \frac{1 - \cos x}{x^2}}{\frac{\sin(x^2)}{x^2}} = a + \frac{1}{2}.$$

La condición de que el límite valga 1 da $a + \frac{1}{2} = 1$, luego

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = 0.$$

Opción B - Ejercicio 2

Integramos dos veces la condición $f''(x) = \ln x$, válida para $x > 0$:

$$f'(x) = x \ln x - x + C_1.$$

La tangente horizontal en $P = (1, 2)$ exige $f'(1) = 0$, así que $-1 + C_1 = 0$ y $C_1 = 1$. Integramos de nuevo:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int (x \ln x - x + 1) dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2} + x + C_2 \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{3x^2}{4} + x + C_2. \end{aligned}$$

La condición $f(1) = 2$ determina C_2 :

$$\frac{1}{4} + C_2 = 2 \implies C_2 = \frac{7}{4}.$$

Por tanto,

$$f(x) = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{3x^2}{4} + x + \frac{7}{4}, \quad x > 0.$$

Opción B - Ejercicio 3

a) Para comparar los rangos, empezamos por los determinantes:

$$\det A = -m - 4 = -(m + 4), \quad \det B = m(m + 4).$$

Si $m \neq -4$, la matriz A tiene rango 2. La matriz B tiene rango 3 cuando $m \neq 0, -4$, así que no puede tener el mismo rango que A en esos casos. Para $m = 0$, A tiene rango 2 y B también: su tercera columna es nula, pero el menor de las dos primeras filas y las dos primeras columnas vale $4 \neq 0$. Para $m = -4$, A tiene rango 1 mientras que B tiene rango 2 (la tercera fila aporta una dirección independiente de las dos primeras). Por consiguiente, el único valor con rangos iguales es

$$m = 0.$$

b) Igualamos los determinantes:

$$-(m + 4) = m(m + 4) \iff (m + 4)(m + 1) = 0.$$

Así, A y B tienen el mismo determinante cuando

$$m = -4 \quad \text{o} \quad m = -1.$$

Opción B - Ejercicio 4

El vector normal del plano π es $\vec{n} = (2, 1, -1)$ y

$$\|\vec{n}\|^2 = 6, \quad 2(2) + (-1) - 5 + 8 = 6.$$

a) La reflexión de un punto P respecto de un plano se obtiene restando dos veces su proyección perpendicular sobre el vector normal, escalada por el valor de la ecuación del plano:

$$P' = P - 2 \frac{\vec{n} \cdot P + 8}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n}.$$

Para $P = (2, -1, 5)$, el numerador es 6, así que

$$P' = (2, -1, 5) - 2(2, 1, -1) = (-2, -3, 7).$$

b) La recta original pasa por $P = (2, -1, 5)$ y tiene vector director $\vec{v} = (-2, 3, 1)$. Al reflejar la recta, se refleja tanto un punto como su vector director. La componente normal de un vector cambia de signo, por lo que

$$\vec{v}' = \vec{v} - 2 \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} = (-2, 3, 1) + \frac{2}{3}(2, 1, -1) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{11}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Podemos tomar el vector proporcional $(-2, 11, 1)$. Con el punto reflejado $P' = (-2, -3, 7)$, la recta simétrica en forma paramétrica es

$$r' : \begin{cases} x = -2 - 2t, \\ y = -3 + 11t, \\ z = 7 + t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$