

EJERCICIO A

PROBLEMA 1. Se pretende cultivar en un terreno dos tipos de olivos: A y B. No se puede cultivar más de 8 ha. con olivos de tipo A ni más de 10 ha. con olivos de tipo B. Cada hectárea de olivos de tipo A necesita 4 m^3 de agua anuales y cada una de tipo B, 3 m^3 . Se dispone anualmente de 44 m^3 de agua. Cada hectárea de tipo A requiere una inversión de 500 € y cada una de tipo B, 225 €. Se dispone de 4500 € para realizar dicha inversión. Si cada hectárea de olivar de tipo A y B producen, respectivamente, 500 y 300 litros anuales de aceite,

- Obtener razonadamente las hectáreas de cada tipo de olivo que se deben plantar para maximizar la producción de aceite.
- Obtener la producción máxima.

Solución:

Los datos del problema podemos resumirlos en la tabla

Tipo de olivo	Agua por ha. y año	Inversión por ha.	Producción por ha.	ha. dedicadas
A	4 m^3	500 €	500 l	x
B	3 m^3	225 €	300 l	y
Restricciones	44 m^3	4500 €		

Las ecuaciones de las restricciones serán,

“No se pueden cultivar más de 8 ha. con olivos del tipo A” $x \leq 8$

“No se pueden cultivar más de 10 ha. con olivos del tipo B” $y \leq 10$

“Se dispone de 44 m^3 de agua al año” $4x + 3y \leq 44$

“Se dispone de 4500 € para invertir” $500x + 225y \leq 4500$

Queremos maximizar la producción de aceite que será: $500x + 300y$

El problema a resolver es:

maximizar $z = 500x + 300y$

$$s.a. \begin{cases} x \leq 8 \\ y \leq 10 \\ 4x + 3y \leq 44 \\ 500x + 225y \leq 4500 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Cálculos para representar las restricciones

$$4x + 3y \leq 44 \qquad 500x + 225y \leq 4500$$

$$4x + 3y = 44 \qquad 500x + 225y = 4500$$

$$\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 11 & 0 \\ 0 & \frac{44}{3} \end{array}$$

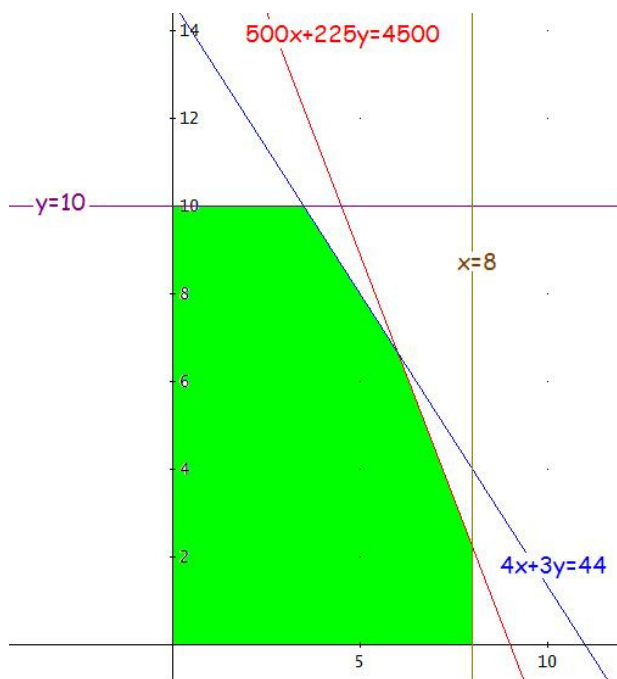
$$\begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 9 & 0 \\ 0 & 20 \end{array}$$

¿(0,0) cumple?

¿(0,0) cumple?

$$4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \leq 44 \quad \text{sí}$$

$$500 \cdot 0 + 225 \cdot 0 \leq 4500 \quad \text{sí}$$



Debemos calcular los siguientes puntos de corte,

$$\begin{cases} y = 10 \\ 4x + 3y = 44 \end{cases} \quad 4x + 3 \cdot 10 = 44 \rightarrow 4x = 14 \rightarrow x = \frac{14}{4} = 3.5 \rightarrow (3.5, 10)$$

$$\begin{cases} 4x + 3y = 44 \\ 500x + 225y = 4500 \end{cases} \quad \text{de la 1ª} \quad y = \frac{44 - 4x}{3}$$

$$\text{sustituyendo en la 2ª} \quad 500x + 225 \cdot \frac{44 - 4x}{3} = 4500$$

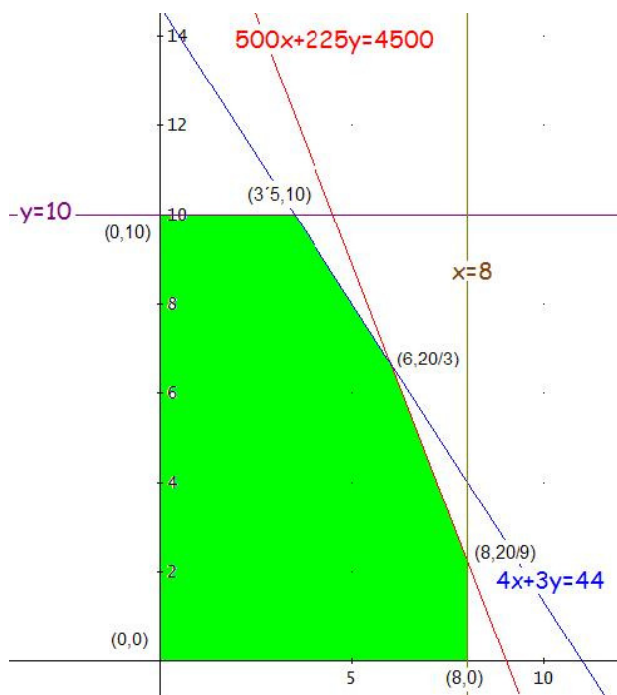
$$1500x + 9900 - 900x = 13500$$

$$600x = 3600 \rightarrow x = \frac{3600}{600} = 6 \rightarrow y = \frac{44 - 4 \cdot 6}{3} = \frac{20}{3} \rightarrow \left(6, \frac{20}{3}\right)$$

$$\begin{cases} x = 8 \\ 500x + 225y = 4500 \end{cases} \quad 500 \cdot 8 + 225y = 4500 \rightarrow 225y = 500 \rightarrow y = \frac{500}{225} = \frac{20}{9} \rightarrow \left(8, \frac{20}{9}\right)$$

La región factible está limitada por los puntos

$$(0, 0), (0, 10), (3.5, 10), \left(6, \frac{20}{3}\right), \left(8, \frac{20}{9}\right) \text{ y } (8, 0)$$



Sabemos que la función que queremos maximizar alcanzará su máximo en los extremos de la región factible.

(x, y)	$z = 500x + 300y$
$(0,0)$	$500 \cdot 0 + 300 \cdot 0 = 0$
$(0,10)$	$500 \cdot 0 + 300 \cdot 10 = 3000$
$(3.5,10)$	$500 \cdot 3.5 + 300 \cdot 10 = 4750$
$(6, \frac{20}{3})$	$500 \cdot 6 + 300 \cdot \frac{20}{3} = 5000$ <i>máximo</i>
$(8, \frac{20}{9})$	$500 \cdot 8 + 300 \cdot \frac{20}{9} = 4666.666...$
$(8,0)$	$500 \cdot 8 + 300 \cdot 0 = 4000$

La función $z = 500x + 300y$ alcanza su máximo en el punto $(6, \frac{20}{3})$

Por lo tanto, para maximizar la producción de aceite se deben plantar 6 ha de olivos del tipo A y $\frac{20}{3}$ ha de olivos del tipo B.

La producción máxima será de 5000 l de aceite.

EJERCICIO A

PROBLEMA 2. Obtener de forma razonada la matriz X que verifica $A \bullet X = 2B - C$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 13 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

Partimos de $AX = 2B - C$, si existe A^{-1} podemos obtener la matriz X de la siguiente forma, multiplicando la expresión anterior por A^{-1} por la izquierda

$$A^{-1}AX = A^{-1}(2B - C)$$

$$IX = A^{-1}(2B - C)$$

$$X = A^{-1}(2B - C)$$

Veamos si podemos calcular A^{-1}

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \quad \text{luego } \exists A^{-1}$$

Cálculo de A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha_{ij}} \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{ij}} \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{ji}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{5} \\ 1 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Antes de calcular la matriz X , calculemos $2B - C$,

$$2B - C = 2 \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 13 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -13 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -15 & 0 \end{pmatrix}$$

y finalmente

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{5} \\ 1 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -15 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 8 + \frac{1}{5} \cdot 15 & 0 \cdot (-1) - \frac{1}{5} \cdot 0 \\ 1 \cdot 8 - \frac{2}{5} \cdot 15 & 1 \cdot (-1) + \frac{2}{5} \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO A

PROBLEMA 3. La relación entre la temperatura del aire T (en $^{\circ}\text{F}$) y la altura h (en metros sobre el nivel del mar) es lineal para $0 \leq h \leq 20000$. Si la temperatura a nivel del mar es 60°F y por cada 5000 m. de altitud que se sube, la temperatura del aire baja 18°F , se pide:

- Expresar T en función de h .
- Calcular de forma razonada la temperatura del aire a una altitud de 15000 m.
- Calcular de forma razonada la altitud a la que la temperatura es 0°F .

Solución:

De los datos del problema sabemos que para $h = 0$ $T = 60^{\circ}\text{F}$, que por cada 5000 m de altitud que se sube la temperatura baja 18°F y que la relación entre T y h es lineal, luego

$$a) \quad T = 60 - \frac{18h}{5000} \quad 0 \leq h \leq 20000, \quad \text{siendo} \quad \begin{array}{l} h \text{ altitud en m.} \\ T \text{ temperatura en } ^{\circ}\text{F.} \end{array}$$

$$b) \quad h = 15000, \quad \text{como } 0 \leq h \leq 20000 \rightarrow T = 60 - \frac{18 \cdot 15000}{5000} = 6$$

a 15000 m la temperatura del aire es de 6°F .

$$c) \quad h? \text{ tal que } T = 0$$

$$0 = 60 - \frac{18h}{5000} \rightarrow 0 = 300000 - 18h \rightarrow h = \frac{300000}{18} = 16666'667$$

$$\text{como } 0 \leq 16666'667 \leq 20000 \rightarrow \text{A una altitud de } 16666'667\text{m la temperatura es de } 0^{\circ}\text{F}$$

EJERCICIO A

PROBLEMA 4. El 60% de los alumnos de Bachillerato de un Instituto son chicas y el 40% chicos. La mitad de los chicos lee asiduamente la revista COMIC, mientras que sólo el 30% de las chicas la lee.

- Obtener de forma razonada la probabilidad de que un alumno elegido al azar lea esta revista.
- Si un alumno elegido al azar nos dice que no lee la revista, obtener de forma razonada la probabilidad de que sea chica.

Solución:

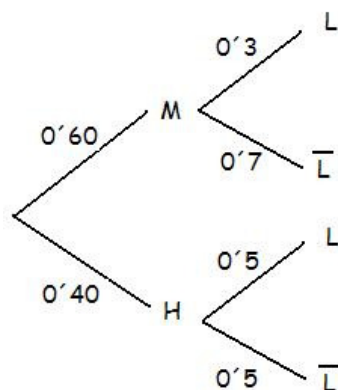
Utilizamos los siguientes sucesos:

M = ser chica

H = ser chico

L = leer la revista COMIC

De los datos del problema el árbol es:



Obtengamos las probabilidades pedidas,

$$a) \quad p(L) = 0.6 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.5 = 0.18 + 0.20 = 0.38$$

$$b) \quad p\left(\frac{M}{\bar{L}}\right) = \frac{p(M \cap \bar{L})}{p(\bar{L})} = \frac{0.6 \cdot 0.7}{1 - p(L)} = \frac{0.42}{1 - 0.38} = \frac{0.42}{0.62} = 0.68$$

EJERCICIO B

PROBLEMA 1. Una empresa fabrica dos tipos de aparatos A y B que necesitan pasar por los talleres X e Y. En cada uno de los talleres se trabaja 100 horas a la semana. Cada aparato A requiere 3 horas del taller X y 1 hora del Y y cada aparato B, 1 y 2 horas, respectivamente. Cada aparato A se vende a 100 € y cada aparato B, a 150 €.

- Obtener razonadamente cuántos aparatos de cada tipo han de producirse para que el ingreso por ventas sea máximo.
- ¿Cuál es el ingreso máximo?

Solución:

Los datos del problema podemos resumirlos en la tabla

Aparato	Taller X	Taller Y	Precio venta	Nº de aparatos
A	3 h	1 h	100 €	x
B	1 h	2 h	150 €	y
Restricciones	100 h	100 h		

Las ecuaciones de las restricciones serán,

Horas de trabajo en el taller X $3x + y \leq 100$

Horas de trabajo en el taller Y $x + 2y \leq 100$

Como x e y representan el número de aparatos $x, y \in \mathbb{N}$

Los ingresos que se obtendrán serán: $100x + 150y$

El problema a resolver es:

maximizar $z = 100x + 150y$

$$s.a. \begin{cases} 3x + y \leq 100 \\ x + 2y \leq 100 \\ x, y \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Cálculos para representar las restricciones

$$3x + y \leq 100$$

$$x + 2y \leq 100$$

$$3x + y = 100$$

$$x + 2y = 100$$

x	y
0	100
100	0
3	

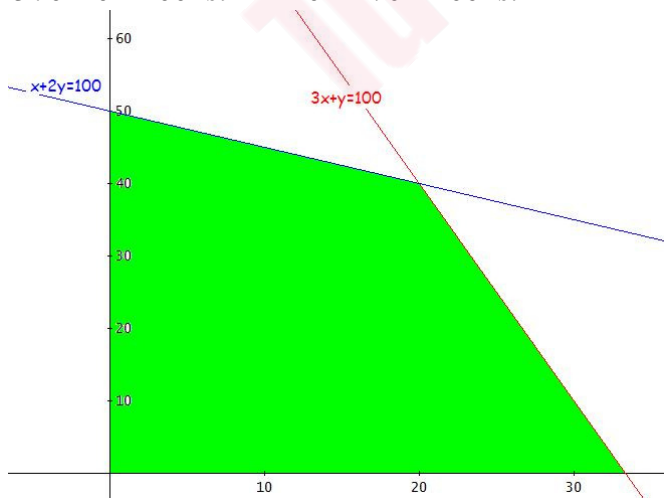
x	y
0	50
100	0

¿(0,0) cumple?

¿(0,0) cumple?

$$3 \cdot 0 + 0 \leq 100 \quad \text{sí}$$

$$0 + 2 \cdot 0 \leq 100 \quad \text{sí}$$



La región factible está formada por los puntos de coordenada natural de la zona sombreada.

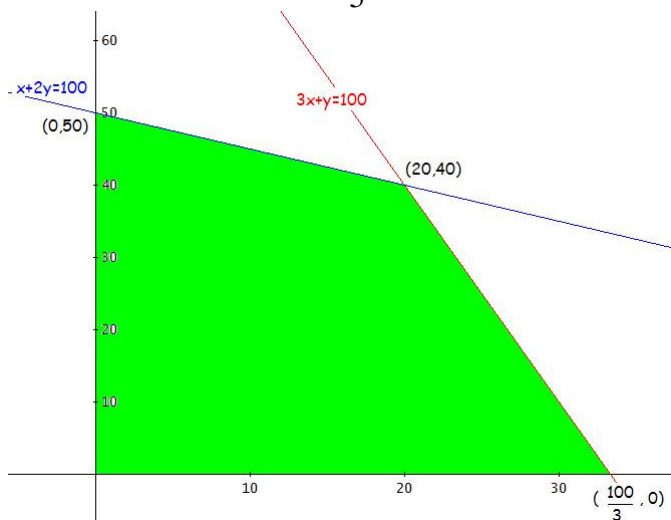
Debemos calcular los siguientes puntos de corte,

$$\begin{cases} 3x + y = 100 \\ x + 2y = 100 \end{cases} \quad \text{de la 1ª} \quad y = 100 - 3x$$

sustituyendo en la 2ª $x + 2(100 - 3x) = 100$

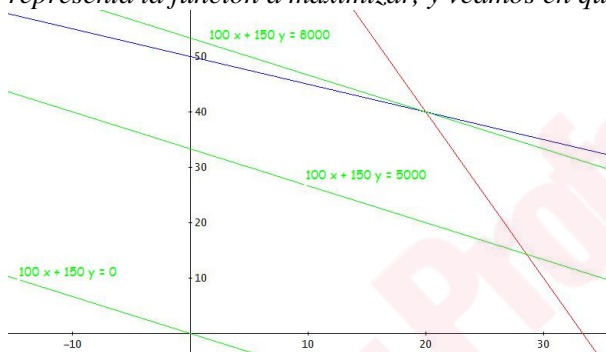
$$x + 200 - 6x = 100$$

$$-5x = -100 \rightarrow x = \frac{-100}{-5} = 20 \rightarrow y = 100 - 3 \cdot 20 = 40 \rightarrow (20, 40)$$



Entre los puntos que limitan la zona sombreada está el $\left(\frac{100}{3}, 0\right)$ que no es de la región factible, pues su abscisa no es natural.

Vamos a obtener de forma gráfica la solución, para ello trazaremos rectas paralelas a la $100x + 150y = 0$, que representa la función a maximizar, y veamos en qué punto de la región factible alcanza el máximo.



Gráficamente observamos que la función $z = 100x + 150y$ alcanza su máximo en el punto $(20, 40)$.

Podemos comprobarlo como sigue,

(x, y)	$z = 100x + 150y$
$(0, 50)$	$100 \cdot 0 + 150 \cdot 50 = 7500$
$(20, 40)$	$100 \cdot 20 + 150 \cdot 40 = 8000$

- a) Para que el ingreso por las ventas sea máximo hay que producir 20 aparatos del tipo A y 40 del tipo B.
b) El ingreso máximo será de 8000 € ($100 \cdot 20 + 150 \cdot 40 = 2000 + 6000 = 8000$).

EJERCICIO B

PROBLEMA 2. Encontrar de forma razonada la ecuación de la recta paralela a $y = 2x - 3$ que pasa por el punto de intersección de $y = 3x - 2$ y $3x - 2y = 1$.

Solución:

Calculemos el punto de corte,

$$\begin{cases} y = 3x - 2 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de y en la 2ª ecuación,

$$3x - 2(3x - 2) = 1$$

$$3x - 6x + 4 = 1$$

$$-3x - 3$$

$$x = 1$$

$$\text{Y por lo tanto, } y = 3 \cdot 1 - 2 = 1$$

El punto de intersección de la rectas es $(1, 1)$.

La recta paralela a $y = 2x - 3$ será de la forma $y = 2x + n$.

Obtendremos el valor de n sabiendo que debe pasar por el punto $(1, 1)$,

$$1 = 2 \cdot 1 + n$$

$$1 = 2 + n$$

$$n = -1$$

La ecuación de la recta pedida es: $y = 2x - 1$

EJERCICIO B

PROBLEMA 3. Se calcula que entre las 2000 y 5000 revoluciones por minuto el consumo de gasolina de un motor viene dado por la función $f(x) = 2x^2 - 12x + 23$, donde $f(x)$ indica los litros consumidos en una hora y x viene expresada en miles de revoluciones por minuto. Hallar de forma razonada:

- Las revoluciones con las que el consumo del motor es mínimo.
- Las revoluciones con las que el consumo del motor es máximo, y
- Dichos consumos.

Solución:

Representemos la función dada para valores entre 2000 y 5000 revoluciones por minuto (rpm), es decir, para valores de x entre 2 y 5. Como la función es una parábola, calculemos en primer lugar su vértice.

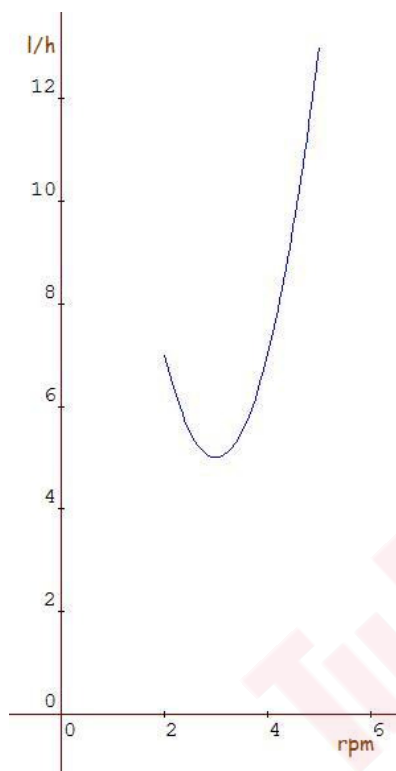
$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-12)}{2 \cdot 2} = \frac{12}{4} = 3 \rightarrow f(3) = 2 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 + 23 = 18 - 36 + 23 = 5$$

vértice (3 , 5)

y los extremos

$$\text{para } x = 2; f(2) = 2 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 23 = 8 - 24 + 23 = 7$$

$$\text{para } x = 5; f(5) = 2 \cdot 5^2 - 12 \cdot 5 + 23 = 50 - 60 + 23 = 13$$



Podemos contestar las preguntas del problema a través del gráfico.

- El consumo del motor es mínimo a 3000 revoluciones por minuto.
- El consumo del motor es máximo a 5000 revoluciones por minuto.
- A 3000 rpm el consumo es de 5 l/h
A 5000 rpm el consumo es de 13 l/h

EJERCICIO B

PROBLEMA 4. En una bolsa de caramelos surtidos hay 10 caramelos con sabor a naranja, 5 con sabor a limón y 3 con sabor a fresa. Todos tienen el mismo tamaño y hasta extraerlos de la bolsa no se sabe de qué sabor son. Se extraen tres caramelos al azar.

- Calcular de forma razonada la probabilidad de extraer primero uno con sabor a naranja, luego otro con sabor a fresa y, por último, uno con sabor a limón.
- Calcular de forma razonada la probabilidad que sean de tres sabores diferentes.

Solución:

El proceso consiste en una extracción sin devolución.

Llamando N = caramelo con sabor a naranja, F = caramelo con sabor a fresa y L = caramelo con sabor a limón

$$a) p(1^{\circ}N, 2^{\circ}F, 3^{\circ}L) = \frac{10}{18} \frac{3}{17} \frac{5}{16} = \frac{150}{4896} = \frac{25}{816} = 0,0306$$

- b) Este caso difiere del anterior en que no importa el orden en que se extraigan los tres caramelos diferentes.*

Los resultados posibles para que los tres caramelos sean diferentes son:

$$N \begin{cases} L - F & 1^{\circ} N, 2^{\circ} L, 3^{\circ} F \\ F - L & 1^{\circ} N, 2^{\circ} F, 3^{\circ} L \end{cases}$$

$$F \begin{cases} N - L \\ L - N \end{cases}$$

$$L \begin{cases} N - F \\ F - N \end{cases}$$

es decir, hay 6 resultados posibles y cada uno de estos resultados tiene la misma probabilidad, la calculada en el apartado anterior. Luego

$$p(\text{tres sabores diferentes}) = 6 \frac{25}{816} = \frac{25}{136} = 0,1838$$