

Junio de 2010 · Convocatoria ordinaria

El examen permite elegir la opción A o la B. Para que puedas preparar cualquiera de las dos, resolvemos todos sus problemas a partir de los datos impresos en el enunciado.

Opción A · Álgebra, geometría y optimización

Problema A.1 · Operaciones e inversas de matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcular $(A - I)^2$ y $A(A - 2I)$

Primero restamos las matrices elemento a elemento:

$$N = A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Multiplicamos N por sí misma:

$$\begin{aligned} (A - I)^2 = N^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+2-3 & 1+2-3 & 1+2-3 \\ 2+4-6 & 2+4-6 & 2+4-6 \\ -3-6+9 & -3-6+9 & -3-6+9 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}. \end{aligned}$$

Ahora calculamos primero $A - 2I$ y después hacemos el producto en el orden pedido:

$$\begin{aligned} A - 2I &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & -3 & -4 \end{pmatrix}, \\ A(A - 2I) &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & -3 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \boxed{-I}. \end{aligned}$$

b) Justificar qué matrices tienen inversa

Una matriz cuadrada es invertible exactamente cuando su determinante es distinto de cero. Calculamos los tres determinantes relevantes:

$$\begin{aligned} \det A &= 2(3(-2) - 2(-3)) - 1(2(-2) - 2(-3)) + 1(2(-3) - 3(-3)) = 1, \\ \det(A - 2I) &= -1(2(-4) - 2(-3)) + 1(2(-3) - 1(-3)) = -1. \end{aligned}$$

Los dos determinantes son no nulos, de modo que existen A^{-1} y $(A - 2I)^{-1}$. En $N = A - I$, las filas cumplen $F_2 = 2F_1$ y $F_3 = -3F_1$; por tanto, $\det(A - I) = 0$ y no existe $(A - I)^{-1}$.

Además, del resultado del apartado a), $A(A - 2I) = -I$. Como A^{-1} existe, multiplicamos por A^{-1} a la izquierda:

$$A - 2I = -A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = -(A - 2I) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Así quedan justificadas las tres afirmaciones del enunciado.

c) Hallar λ si $A^{-1} = \lambda(A - 2I)$

La identidad anterior ya expresa la inversa como múltiplo de $A - 2I$:

$$A^{-1} = -(A - 2I) = \lambda(A - 2I) \Rightarrow \boxed{\lambda = -1}.$$

Problema A.2 · Rectas que se cruzan, distancia y plano equidistante

Las rectas vienen dadas como intersecciones de planos:

$$r: \begin{cases} 5x + y - z = 4, \\ 2x - 2y - z = -5, \end{cases} \quad s: \begin{cases} x - y = -5, \\ z = 4. \end{cases}$$

Para trabajar con ellas, las escribimos en forma paramétrica. En r , restamos la segunda ecuación de la primera:

$$3x + 3y = 9 \Rightarrow x + y = 3.$$

Tomamos $x = t$, de modo que $y = 3 - t$. Sustituyendo en la primera ecuación, $z = 5x + y - 4 = 4t - 1$. Por tanto,

$$r: \begin{cases} x = t, \\ y = 3 - t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = 4t - 1, \end{cases}$$

En s , tomamos $y = u$; entonces $x = u - 5$ y $z = 4$:

$$s: \begin{cases} x = u - 5, \\ y = u, \quad u \in \mathbb{R}. \\ z = 4, \end{cases}$$

Sus puntos y vectores directores son $P_r = (0, 3, -1)$, $d_r = (1, -1, 4)$, $P_s = (-5, 0, 4)$ y $d_s = (1, 1, 0)$.

a) Justificar que son rectas cruzadas

Dos rectas son cruzadas si no son paralelas y no se cortan; de manera equivalente, no están en un mismo plano. Comprobamos esto con el producto mixto de sus dos vectores directores y el vector que une un punto de cada recta:

$$\begin{aligned} d_r \times d_s &= (-4, 4, 2), \quad P_s - P_r = (-5, -3, 5), \\ (P_s - P_r) \cdot (d_r \times d_s) &= (-5, -3, 5) \cdot (-4, 4, 2) = 20 - 12 + 10 = 18 \neq 0. \end{aligned}$$

El producto mixto no nulo demuestra que las direcciones y los dos puntos no son coplanarios. En particular, las rectas no son paralelas ni se cortan: **son cruzadas**.

b) Calcular la distancia entre las rectas

Para dos rectas cruzadas, la distancia es el módulo de la proyección de $P_s - P_r$ sobre la dirección perpendicular común $d_r \times d_s$:

$$d(r, s) = \frac{|(P_s - P_r) \cdot (d_r \times d_s)|}{\|d_r \times d_s\|}.$$

Sustituimos los vectores calculados:

$$\|d_r \times d_s\| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + 2^2} = 6, \quad d(r, s) = \frac{|18|}{6} = \boxed{3 \text{ unidades}}.$$

c) Hallar el plano paralelo y equidistante

Un vector normal del plano paralelo a ambas rectas debe ser perpendicular a sus dos vectores directores. Podemos tomar

$$n = d_r \times d_s = (-4, 4, 2).$$

Como $n \cdot d_r = n \cdot d_s = 0$, el valor de $n \cdot X$ es constante a lo largo de cada recta. En los puntos base:

$$n \cdot P_r = 10, \quad n \cdot P_s = 28.$$

El plano intermedio equidistante debe tener como término constante el promedio $(10 + 28)/2 = 19$. En forma general:

$$\pi: -4x + 4y + 2z - 19 = 0.$$

Comprobación: la distancia de cada recta a ese plano es $|19 - 10|/\|n\| = |28 - 19|/\|n\| = 9/6 = 3/2$, así que ambas distancias son iguales.

Problema A.3 · Estadio con dos semicírculos

Sea x la base del rectángulo y h su altura. Los dos semicírculos tienen diámetro x ; juntos forman un círculo de radio $x/2$. El área total debe ser 10000 m^2 :

$$xh + \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 = 10000 \Rightarrow h = \frac{10000}{x} - \frac{\pi x}{4}.$$

Como las longitudes x y h deben ser positivas, el dominio geométrico es

$$x > 0, 10000 - \frac{\pi x^2}{4} > 0 \Rightarrow 0 < x < \frac{200}{\sqrt{\pi}}.$$

a) Perímetro en función de x

El perímetro exterior contiene los dos lados verticales, de longitud total $2h$, y los dos arcos semicirculares, cuya longitud conjunta es la circunferencia πx . Los lados horizontales son diámetros interiores y no se vallan:

$$\begin{aligned} P(x) &= 2h + \pi x \\ &= 2\left(\frac{10000}{x} - \frac{\pi x}{4}\right) + \pi x \\ &= \boxed{\frac{20000}{x} + \frac{\pi x}{2} \text{ m.}} \end{aligned}$$

b) Coste de la valla

Los lados verticales cuestan 1 euro por metro y los arcos 2 euros por metro. Por eso, el coste total es $2h \cdot 1 + \pi x \cdot 2$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2h + 2\pi x \\ &= 2\left(\frac{10000}{x} - \frac{\pi x}{4}\right) + 2\pi x \\ &= \boxed{\frac{20000}{x} + \frac{3\pi x}{2}} \text{ (euros).} \end{aligned}$$

Esta función de coste se estudia en el dominio físico $0 < x < 200/\sqrt{\pi}$, porque fuera de él alguna dimensión del estadio dejaría de ser positiva.

c) Anchura que minimiza el coste

Derivamos la función de coste y buscamos sus puntos críticos dentro del dominio:

$$f'(x) = -\frac{20000}{x^2} + \frac{3\pi}{2} = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{40000}{3\pi}.$$

Como x es una longitud positiva, tomamos la raíz positiva:

$$x_0 = \frac{200}{\sqrt{3\pi}} \text{ m.}$$

Comprobamos las asíntotas en el dominio físico. En el extremo $x = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty,$$

por lo que $x = 0$ es una asíntota vertical. En el otro extremo $b = 200/\sqrt{\pi}$,

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \frac{20000}{200/\sqrt{\pi}} + \frac{3\pi}{2} \frac{200}{\sqrt{\pi}} = 400\sqrt{\pi},$$

que es finito; no hay asíntota vertical en ese extremo. El dominio físico está acotado superiormente, así que no contiene valores que tiendan a $+\infty$: en este modelo no hay asíntota horizontal ni oblicua.

Para justificar el sentido del cambio, elegimos un valor de prueba de cada lado de x_0 . Como $x_0 \approx 65,15$ y $200/\sqrt{\pi} \approx 112,84$, podemos tomar 10 y 80, ambos dentro del dominio:

$$f'(10) = -200 + \frac{3\pi}{2} < 0, f'(80) = -\frac{25}{8} + \frac{3\pi}{2} > 0.$$

Tabla de signos de la función de coste

x	$(0, x_0)$	x_0	$(x_0, 200/\sqrt{\pi})$
valor de prueba	10	—	80
$f'(x)$	—	0	+
coste	decrece	mínimo	crece

El signo pasa de negativo a positivo; por eso el coste baja hasta x_0 y sube después. Además, al acercarnos a 0, $f(x) \rightarrow +\infty$, mientras que en el extremo superior $f(x) \rightarrow 400\sqrt{\pi} > 200\sqrt{3\pi} = f(x_0)$, pues $2 > \sqrt{3}$. Así, el mínimo es absoluto y se alcanza en x_0 . La anchura buscada es

$$x = \frac{200}{\sqrt{3\pi}} \text{ m} \approx 65,15 \text{ m}.$$

El coste mínimo, como comprobación adicional, es $f(x_0) = 200\sqrt{3\pi}$ euros.

Opción B · Sistemas, geometría y análisis

Problema B.1 · Sistema que depende de a, b, c

$$\begin{cases} 2ax + by + z = 3, \\ 3x - 2by - 2cz = a, \\ 5ax - 2y + cz = -4b. \end{cases}$$

Para clasificar un sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, usamos el teorema de Rouché-Frobenius: es compatible si $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*)$, donde A^* es la matriz ampliada. Si esos rangos comunes igualan el número de incógnitas, la solución es única; si son menores, hay infinitas soluciones.

a) Justificar que es incompatible para $a = 0$, $b = -1$, $c = 2$

Sustituimos esos parámetros en las tres ecuaciones:

$$\begin{cases} -y + z = 3, \\ 3x + 2y - 4z = 0, \\ -2y + 2z = 4. \end{cases}$$

La tercera ecuación tiene el doble de los coeficientes de la primera, pero no el doble del término independiente: duplicar la primera exigiría $-2y + 2z = 6$, no 4. Lo demostramos comparando los rangos:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_0^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{array} \right).$$

Las filas 1 y 3 de A_0 son proporcionales, por lo que $\det A_0 = 0$ y $\text{rg}(A_0) \leq 2$. El menor de orden 2 formado por las filas 1 y 2 y las columnas 1 y 2 es no nulo:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A_0) = 2.$$

En la ampliada, el menor de orden 3 que usa las columnas de x, y y los términos independientes vale

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(A_0^*) = 3.$$

Como $\text{rg}(A_0) = 2 \neq 3 = \text{rg}(A_0^*)$, el sistema es incompatible por Rouché-Frobenius.

b) Encontrar a, b, c para que $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ sea solución

Sustituimos $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ en las ecuaciones del enunciado. La primera da $2a + 2b + 3 = 3$; la segunda, $3 - 4b - 6c = a$; y la tercera, $5a - 4 + 3c = -4b$. Reordenando, obtenemos el sistema lineal en los parámetros:

$$\begin{cases} a + b = 0, \\ a + 4b + 6c = 3, \\ 5a + 4b + 3c = 4. \end{cases}$$

Matrices del sistema en los parámetros

$$A_p = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}, A_p^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{array} \right).$$

El determinante de A_p es

$$\det A_p = 1 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -12 + 27 = 15 \neq 0.$$

Por tanto, $\text{rg}(A_p) = 3$. La ampliada tiene tres filas y contiene esa matriz, luego $\text{rg}(A_p^*) = 3$; el sistema de parámetros es compatible determinado.

Resolvemos por sustitución. De $a + b = 0$, tenemos $a = -b$. Al sustituirlo en las dos ecuaciones restantes:

$$a + 4b + 6c = 3 \Rightarrow 3b + 6c = 3 \Rightarrow b + 2c = 1,$$

$$5a + 4b + 3c = 4 \Rightarrow -b + 3c = 4 \Rightarrow b - 3c = -4.$$

Restamos la segunda igualdad reducida de la primera:

$$(b + 2c) - (b - 3c) = 1 - (-4) \Rightarrow 5c = 5 \Rightarrow c = 1.$$

Entonces $b + 2 = 1$, de donde $b = -1$, y $a = -b = 1$. Por tanto,

$$\boxed{a = 1, b = -1, c = 1}.$$

Al sustituir estos parámetros, las tres igualdades iniciales se cumplen para $(1, 2, 3)$.

c) Comprobar si esa solución es única

Con los parámetros hallados, la matriz de coeficientes es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}, A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & 1 & 4 \end{array} \right).$$

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\det A = 2(2 - 4) - (-1)(3 + 10) + (-6 - 10) = -4 + 13 - 16 = -7 \neq 0.$$

Así, $\text{rg}(A) = 3$. Como la ampliada tiene tres filas y contiene a A , también $\text{rg}(A^*) = 3$. El teorema de Rouché-Frobenius da $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$, igual al número de incógnitas: es un sistema compatible determinado. Por ello $(1, 2, 3)$ es la única solución.

Problema B.2 · Distancias y ángulos con una recta

La recta r tiene punto $P = (0, 3, -1)$ y vector director $d = (2, -1, 1)$. Su forma paramétrica es

$$r : \begin{cases} x = 2t, \\ y = 3 - t, \\ z = -1 + t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

El otro punto es $A = (0, 1, 0)$.

a) Distancia de A a r

La distancia de un punto a una recta es el área del paralelogramo generado por $A - P$ y el vector director, dividida por la longitud de ese vector:

$$d(A, r) = \frac{\|(A - P) \times d\|}{\|d\|}.$$

Sustituimos los datos:

$$A - P = (0, -2, 1), (A - P) \times d = (-1, 2, 4), \|d\| = \sqrt{6}.$$

$$d(A, r) = \frac{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 4^2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{6}} = \boxed{\frac{\sqrt{14}}{2} \text{ unidades}}.$$

b) Ángulo entre PA y r

Un vector director de la recta PA es $\overrightarrow{PA} = A - P = (0, -2, 1)$. El coseno del ángulo entre dos rectas se calcula con el valor absoluto del producto escalar de sus directores dividido por el producto de sus módulos:

$$\cos \theta = \frac{|\overrightarrow{PA} \cdot d|}{\|\overrightarrow{PA}\| \|d\|} = \frac{|3|}{\sqrt{5}\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{30}}.$$

Por tanto,

$$\theta = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{30}}\right) \approx 56,79^\circ.$$

c) Comprobar que los ángulos en P y Q son iguales

El punto Q se obtiene imponiendo $z = 0$ en la recta: $-1 + t = 0$, de donde $t = 1$ y $Q = (2, 2, 0)$. Para comparar los ángulos, usamos el producto escalar en cada vértice:

$$\overrightarrow{PA} = (0, -2, 1), \overrightarrow{PQ} = (2, -1, 1) \Rightarrow \cos \angle APQ = \frac{\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PA}\| \|\overrightarrow{PQ}\|} = \frac{3}{\sqrt{5}\sqrt{6}}.$$

$$\overrightarrow{QA} = (-2, -1, 0), \overrightarrow{QP} = (-2, 1, -1) \Rightarrow \cos \angle AQP = \frac{\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QP}}{\|\overrightarrow{QA}\| \|\overrightarrow{QP}\|} = \frac{3}{\sqrt{5}\sqrt{6}}.$$

Los cosenos son iguales y ambos ángulos son interiores del triángulo; por tanto,

$$\angle APQ = \angle AQP.$$

Problema B.3 · Parábola, tangentes y puntos de tangencia

$$f(x) = 4 - x^2.$$

Antes de derivar, justificamos el dominio: f es polinómica, por lo que está definida para todo número real y $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. No hay asíntotas verticales porque no se excluye ningún valor de x y el polinomio es finito en cada punto. Para las horizontales,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (4 - x^2) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (4 - x^2) = -\infty,$$

así que no hay límite horizontal finito. Para que existiese una asíntota oblicua, debería existir una pendiente finita $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)/x$; pero

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{4}{x} - x,$$

que tiende a $-\infty$ cuando $x \rightarrow +\infty$ y a $+\infty$ cuando $x \rightarrow -\infty$. Tampoco hay asíntotas oblicuas.

Estudiamos ahora la monotonía. La derivada es $f'(x) = -2x$, y los puntos críticos cumplen

$$-2x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Probamos un valor a cada lado: $f'(-1) = 2 > 0$ y $f'(1) = -2 < 0$. No hay puntos fuera del dominio que añadir a la tabla:

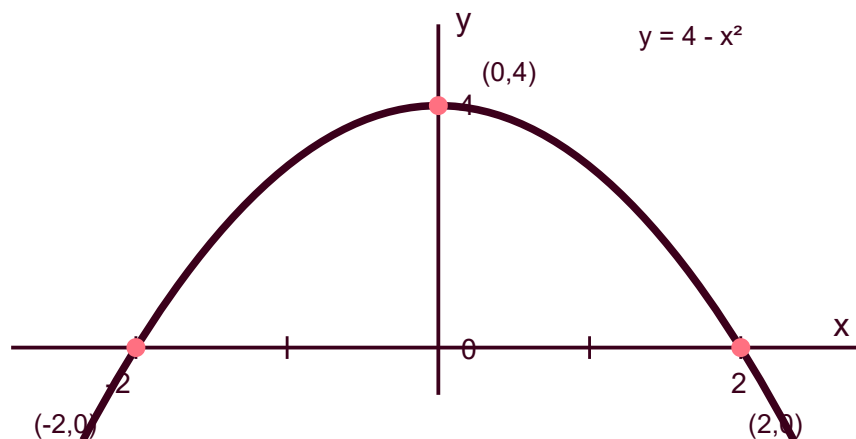
x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
valor de prueba	-1	$-$	1
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	crece	máximo	decrece

El signo cambia de positivo a negativo, así que en $x = 0$ hay un máximo: $f(0) = 4$. No hay mínimo, pues la función tiende a $-\infty$ en ambos extremos.

a) Representar $y = 4 - x^2$

La función es una parábola que abre hacia abajo. El vértice, obtenido en el estudio anterior, es $(0, 4)$; los cortes con el eje OX se calculan resolviendo $4 - x^2 = 0$, que da $x = \pm 2$. Por simetría respecto del eje y , esos tres puntos bastan para trazar el dibujo.

Gráfica propia de la parábola $y = 4 - x^2$



b) Punto donde la tangente es perpendicular a $x + y = 0$

La recta $x + y = 0$ se escribe $y = -x$, por lo que su pendiente es -1 . Una recta perpendicular tiene pendiente 1 . La pendiente de la tangente a la parábola en la abscisa x es la derivada:

$$f'(x) = -2x.$$

Igualemos esa pendiente a 1 y calculamos la ordenada del punto:

$$-2x = 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}, y = f\left(-\frac{1}{2}\right) = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}.$$

El punto pedido es

$$P = \left(-\frac{1}{2}, \frac{15}{4}\right).$$

La tangente correspondiente es $y = x + 17/4$, de pendiente 1, que confirma la perpendicularidad.

c) Tangentes que pasan por $(-2, 1)$

Sea t la abscisa del punto de tangencia. El punto de contacto es $(t, 4 - t^2)$ y la pendiente de la tangente es $f'(t) = -2t$. Usamos la ecuación punto-pendiente:

$$y - (4 - t^2) = -2t(x - t) \Rightarrow y = -2tx + 4 + t^2.$$

Para que la recta pase por $(-2, 1)$, sustituimos esas coordenadas:

$$1 = -2t(-2) + 4 + t^2 \Rightarrow t^2 + 4t + 3 = 0 \Rightarrow (t + 1)(t + 3) = 0.$$

Así, $t = -1$ o $t = -3$. Calculamos los puntos de contacto y sus tangentes:

$$t = -1: (t, 4 - t^2) = (-1, 3), y - 3 = 2(x + 1) \Rightarrow y = 2x + 5;$$

$$t = -3: (t, 4 - t^2) = (-3, -5), y + 5 = 6(x + 3) \Rightarrow y = 6x + 13.$$

Comprobación: ambas rectas pasan por $(-2, 1)$, y sus pendientes 2 y 6 son las derivadas de la parábola en $t = -1$ y $t = -3$, respectivamente.