

EJERCICIO A

PROBLEMA 1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix},$

calcular razonadamente la matriz $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ que satisface la ecuación $(A B' + C) X = (A' D) E$,

donde M' significa la matriz traspuesta de la matriz M (3,3 puntos).

Solución:

$$\text{Llamamos } M = A B' + C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (7 \ 2 \ -2) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 14 & 4 & -4 \\ 21 & 6 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 14 & 5 & -4 \\ 21 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A' D = (1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = (10)$$

$$\text{Llamamos } N = (A' D) E = (10) \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix}$$

La ecuación a resolver es: $M X = N$, si existe M^{-1} entonces $X = M^{-1} N$

$$|M| = \begin{vmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 14 & 5 & -4 \\ 21 & 6 & -5 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 6 & -5 \end{vmatrix} = 7(-25 - 24 - 24 + 30 + 24 + 20) = 7 \neq 0 \Rightarrow \exists M^{-1}$$

Cálculo de M^{-1} ,

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 14 & 5 & -4 \\ 21 & 6 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha_{ij}} \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 5 & -4 & & 14 & -4 & & 14 & 5 & \\ 6 & -5 & & 21 & -5 & & 21 & 6 & \\ 2 & -2 & & 7 & -2 & & 7 & 2 & \\ \hline 6 & -5 & & 21 & -5 & & 21 & 6 & \\ 2 & -2 & & 7 & -2 & & 7 & 2 & \\ 5 & -4 & & 14 & -4 & & 14 & 5 & \end{array} \right) = \begin{pmatrix} -1 & 14 & -21 \\ 2 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{M_{ij}} \begin{pmatrix} -1 & -14 & -21 \\ -2 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{M_{ji}} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -14 & 7 & 0 \\ -21 & 0 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -14 & 7 & 0 \\ -21 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{Por lo que } X = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -14 & 7 & 0 \\ -21 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -20 - 100 + 60 \\ -280 + 350 \\ -420 + 210 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -60 \\ -70 \\ -210 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO A

PROBLEMA 2. Un paralelepípedo rectangular (u ortoedro) tiene tres de sus aristas sobre las rectas:

$$l: \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}, \quad m: \begin{cases} x-2y=0 \\ z=0 \end{cases} \quad y \quad n: \begin{cases} 2x+y=0 \\ z=0 \end{cases}, \quad \text{y uno de sus vértices es } (12, 21, -11). \text{ Se pide:}$$

a) Hallar los vértices restantes (2,5 puntos). b) Calcular su volumen (0,8 puntos).

Solución:

Obtengamos las ecuaciones paramétricas de las rectas l , m y n .

$$l: \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{la recta } l \text{ es el eje } Z$$

$$m: \begin{cases} x-2y=0 \\ z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2y \\ z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2\mu \\ y=\mu \\ z=0 \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R}$$

las rectas m y n están en el plano $z=0$

$$n: \begin{cases} 2x+y=0 \\ z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=-2x \\ z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\gamma \\ y=-2\gamma \\ z=0 \end{cases} \quad \gamma \in \mathbb{R}$$

Obtengamos los puntos de intersección de estas tres rectas,

$$l \cap m \equiv \begin{cases} 0=2\mu \\ 0=\mu \\ \lambda=0 \end{cases} \rightarrow \lambda=\mu=0 \rightarrow l \cap m = (0,0,0)$$

$$l \cap n \equiv \begin{cases} 0=\gamma \\ 0=-2\gamma \\ \lambda=0 \end{cases} \rightarrow \lambda=\gamma=0 \rightarrow l \cap n = (0,0,0)$$

$$m \cap n \equiv \begin{cases} 2\mu=\gamma \\ \mu=-2\gamma \\ 0=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2(-2\gamma)=\gamma \\ -4\gamma=\gamma \end{cases} \rightarrow \gamma=0 \rightarrow \mu=0 \rightarrow m \cap n = (0,0,0)$$

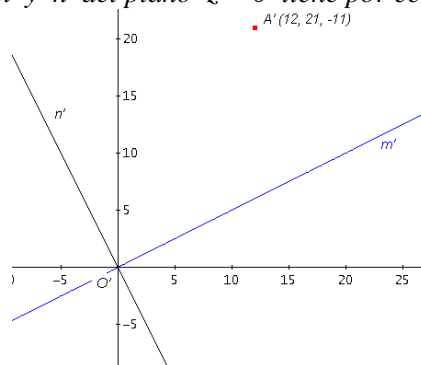
Es decir, el punto $O(0,0,0)$ es un vértice del ortoedro. Como las rectas m y n están en el plano $z=0$, una cara del ortoedro está en este plano.

Una arista del ortoedro está en el eje Z , el vértice $A'(12,21,-11)$ no está en el plano $z=0$, por lo tanto otra de sus caras, la opuesta a la que está en el plano $z=0$, está en el plano $z=-11$.

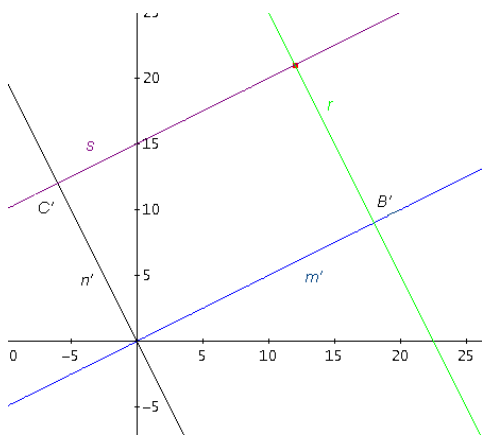
En el plano $z=-11$ los vértices del ortoedro serán: el conocido $(12,21,-11)$, el que está en la arista l que será $O'(0,0,-11)$ y los otros dos los obtenemos como sigue,

en el plano $z=-11$ las rectas paralelas a m y n del plano $z=0$ tiene por ecuaciones:

$$m': \begin{cases} x=2\mu \\ y=\mu \\ z=-11 \end{cases} \quad n': \begin{cases} x=\gamma \\ y=-2\gamma \\ z=-11 \end{cases} \quad \text{gráficamente}$$



para encontrar los otros dos vértices procedemos de la siguiente forma,



recta r que pasa por $A'(12, 21, -11)$ y es paralela a n' $r: \begin{cases} x = 12 + \lambda \\ y = 21 - 2\lambda \\ z = -11 \end{cases}$

B' punto de corte entre r y m'

$$\begin{cases} 12 + \lambda = 2\mu \\ 21 - 2\lambda = \mu \\ -11 = -11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda - 2\mu = -12 \\ -2\lambda - \mu = -21 \end{cases} \rightarrow 2 \cdot 1^a \rightarrow \begin{cases} 2\lambda - 4\mu = -24 \\ -2\lambda - \mu = -21 \end{cases}$$

$$\text{sumando} \rightarrow -5\mu = -45 \rightarrow \mu = 9 \Rightarrow B'(18, 9, -11)$$

recta s que pasa por $A'(12, 21, -11)$ y es paralela a m' $s: \begin{cases} x = 12 + 2\lambda \\ y = 21 + \lambda \\ z = -11 \end{cases}$

C' punto de corte entre s y n'

$$\begin{cases} 12 + 2\lambda = \gamma \\ 21 + \lambda = -2\gamma \\ -11 = -11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2\lambda - \gamma = -12 \\ \lambda + 2\gamma = -21 \end{cases} \rightarrow 2 \cdot I^a \rightarrow \begin{cases} 4\lambda - 2\gamma = -24 \\ \lambda + 2\gamma = -21 \end{cases}$$

$$\text{sumando} \rightarrow 5\lambda = -45 \rightarrow \lambda = -9 \Rightarrow C'(-6, 12, -11)$$

Los vértices correspondientes en el plano $z = 0$ serán:

$O(0, 0, 0)$, $A(12, 21, 0)$, $B(18, 9, 0)$ y $C(-6, 12, 0)$

Los ocho vértices del ortoedro son:

$O(0, 0, 0)$

$A(12, 21, 0)$

$B(18, 9, 0)$

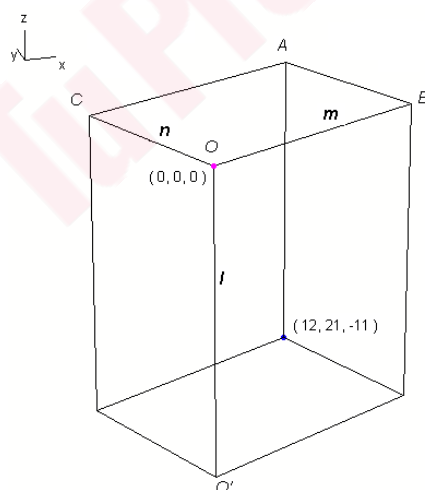
$C(-6, 12, 0)$

$O'(0, 0, -11)$

$A'(12, 21, -11)$

$B'(18, 9, -11)$

$C'(-6, 12, -11)$



b) El ortoedro está definido por los vectores

$$\overrightarrow{OO'} = (0, 0, -11) \quad \overrightarrow{OB} = (18, 9, 0) \quad \overrightarrow{OC} = (-6, 12, 0)$$

$$\text{Luego } V = \left| \begin{vmatrix} 0 & 0 & -11 \\ 18 & 9 & 0 \\ -6 & 12 & 0 \end{vmatrix} \right| = \left| -11 \begin{vmatrix} 18 & 9 \\ -6 & 12 \end{vmatrix} \right| = \left| -11(18 \cdot 12 + 6 \cdot 9) \right| = \left| -11 \cdot 270 \right| = 2970$$

Es decir $V = 2970 u^3$

EJERCICIO A

- PROBLEMA 3.** a) El perímetro de un sector circular de radio R es 4 m. ¿Cuántos radianes α debe medir su ángulo central para que su área sea máxima? (1,8 puntos). (Nota: Perímetro = $2R + R\alpha$; Área = $\frac{1}{2}\alpha R^2$)
 b) El área de otro sector circular es 1 m^2 . ¿Para qué radio es mínimo su perímetro? (1,5 puntos).

Solución:

- a) Como α es el ángulo central de un sector circular, tomara valores entre 0 y 2π .

Conocemos $P = 2R + R\alpha$

$$A = \frac{1}{2}\alpha R^2$$

$P = 4$ y buscamos α para que el área sea máxima

$$4 = 2R + R\alpha \rightarrow 4 = R(2 + \alpha) \rightarrow R = \frac{4}{2 + \alpha}$$

sustituyendo en la fórmula del área,

$$A = \frac{1}{2}\alpha \left(\frac{4}{2 + \alpha} \right)^2 = 8 \frac{\alpha}{(2 + \alpha)^2}$$

$$\text{derivamos } A' = 8 \frac{(2 + \alpha)^2 - \alpha \cdot 2(2 + \alpha)}{(2 + \alpha)^4} = \text{simplificando por } (2 + \alpha) = 8 \frac{(2 + \alpha) - 2\alpha}{(2 + \alpha)^3} =$$

$$= 8 \frac{2 - \alpha}{(2 + \alpha)^3} = \frac{16 - 8\alpha}{(2 + \alpha)^3}$$

Para no calcular la segunda derivada de A , obtendremos el máximo de A mediante el estudio de la monotonía de A ,

$$16 - 8\alpha = 0 \rightarrow \alpha = 2$$

$$(2 + \alpha)^3 = 0 \rightarrow 2 + \alpha = 0 \rightarrow \alpha = -2$$

Como α toma valores entre 0 y 2π , el estudio del signo de A' lo hacemos en este intervalo,



Por lo tanto para $\alpha = 2$ hay un máximo. El área será máxima cuando $\alpha = 2$ rds.

- b) Como R es el radio de un sector circular R debe ser un número positivo.

Conocemos $P = 2R + R\alpha$

$$A = \frac{1}{2}\alpha R^2$$

$A = 1$ y buscamos R para que el perímetro sea mínimo

$$\frac{1}{2}\alpha R^2 = 1 \rightarrow \alpha R^2 = 2 \rightarrow \alpha = \frac{2}{R^2}$$

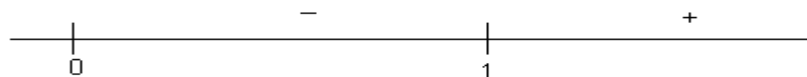
$$P = 2R + R \frac{2}{R^2} = 2R + \frac{2}{R}$$

$$P' = 2 - \frac{2}{R^2}$$

$$2 - \frac{2}{R^2} = 0 \rightarrow 2R^2 - 2 = 0 \rightarrow 2R^2 = 2 \rightarrow R^2 = 1 \rightarrow R = \pm 1$$

Como el radio no puede ser negativo, solución $R = 1$

Estudiamos el signo de P' ,



Para $R = 1$ el perímetro es mínimo.

EJERCICIO A

PROBLEMA 4.1. El caudal de agua (es decir, el volumen por unidad de tiempo) que circula por una tubería cilíndrica es proporcional a la cuarta potencia de su radio. Para abastecer a una población, se han previsto tuberías de cierto radio, pero el fabricante las suministra de un radio que es un 0,5% menor. Estimar en qué porcentaje se reducirá el caudal real respecto del previsto. (3,3 puntos).

Solución:

Llamando C al caudal, del enunciado $C = K r^4$

Como el radio de las tuberías es un 0,5% menor, $r_1 = 0'995 r$ (r radio previsto, r_1 radio real)

El caudal que circula por las tuberías proporcionadas será:

$$C_1 = K (r_1)^4 = K (0'995 r)^4 = K r^4 0'9801495 \cong 0'98 K r^4 = 0'98 C$$

El caudal real se reduce, aproximadamente, en un 2% respecto al previsto.

Tu Profite al Rescate

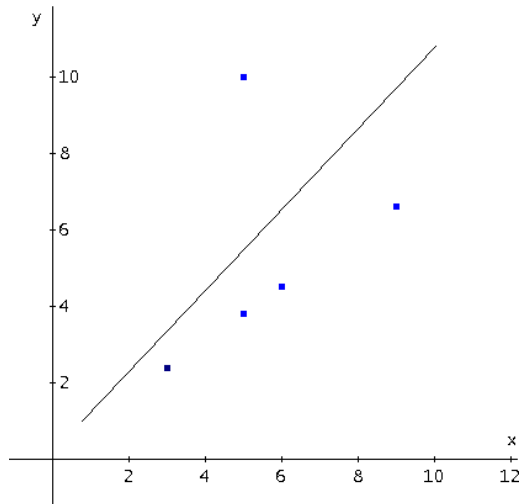
EJERCICIO A

PROBLEMA 4.2. Las coordenadas x e y de los puntos (6; 4,5), (3; 2,4), (9; 6,6) y (5; 10) son las calificaciones de cinco alumnos en Matemáticas y Física. a) Representar los 5 puntos en unos ejes OXY y dibujar aproximadamente la recta de regresión de y sobre x (0,5 puntos) y deducir razonadamente a cuál de los números -1, -0,5 ó 0,5 está más próximo el coeficiente de correlación (1 punto).

b) Calcular el coeficiente de correlación de los cuatro primeros alumnos (0,3 puntos), explicando el resultado obtenido e interpretándolo gráficamente (1,5 puntos).

Solución:

a)



Como es una recta de pendiente positiva el coeficiente de correlación está más próximo a 0'5

b)

x	y	x ²	y ²	xy
3	2,4	9	5,76	7,2
5	3,8	25	14,44	19,0
6	4,5	36	20,25	27,0
9	6,6	81	43,56	59,4
23	17,3	151	84,01	112,6

$$\bar{x} = \frac{23}{4} = 5'75$$

$$\bar{y} = \frac{17'3}{4} = 4'325$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{151}{4} - 5'75^2} = 2'1650635$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{84'01}{4} - 4'325^2} = 1'5155445$$

$$\sigma_{xy} = \frac{112'6}{4} - 5'75 \cdot 4'325 = 3'28125$$

$$\rho = \frac{3'28125}{2'1650635 \cdot 1'5155445} = 0'9999$$

Como el coeficiente de correlación obtenido es prácticamente 1 posiblemente los cuatro puntos estén situados en una recta; veamos si es así.

Obtengamos la ecuación de la recta que pasa por dos de ellos, por ejemplo, (3, 2'4) y (5, 3'8)

$$y - 3'8 = \frac{3'8 - 2'4}{2}(x - 5)$$

$$y - 3'8 = 0'7(x - 5)$$

$$y = 3'8 + 0'7(x - 5)$$

Veamos si los otros dos puntos pertenecen a esta recta

para $x = 6 \rightarrow y = 3'8 + 0'7(6 - 5) = 3'8 + 0'7 = 4'5$ el punto (6, 4'5) pertenece

para $x = 9 \rightarrow y = 3'8 + 0'7(9 - 5) = 3'8 + 2'8 = 6'6$ el punto (9, 6'6) pertenece.

Los cuatro puntos pertenecen a la misma recta, la relación entre ellos es funcional.

EJERCICIO B

PROBLEMA 1. En el mercado podemos encontrar tres alimentos preparados para gatos que se fabrican poniendo, por kilo, las siguientes cantidades de carne pescado y verdura:

- Alimento *Migato*: 600 g de carne, 300 g de pescado y 100 g de verdura.
- Alimento *Catomeal*: 300 g de carne, 400 g de pescado y 300 g de verdura.
- Alimento *Comecat*: 200 g de carne, 600 g de pescado y 200 g de verdura.

Si queremos ofrecer a nuestro gato 470 g de carne, 370 g de pescado y 160 g de verdura por kilo de alimento, ¿qué porcentaje de cada uno de los compuestos anteriores hemos de mezclar para obtener la proporción deseada? (3,3 puntos)

Solución:

Utilizamos las siguientes variables:

x = porcentaje de Migato

y = porcentaje de Catomeal

z = porcentaje de Comecat

Las ecuaciones del sistema las obtenemos a partir de las cantidades de carne, pescado y verdura que queremos obtener por kilo de alimento.

Carne: $600x + 300y + 200z = 470$

Pescado: $300x + 400y + 600z = 370$

Verdura: $100x + 300y + 200z = 160$

Simplificamos las ecuaciones por 100 y el sistema a resolver será,

$$\begin{cases} 6x + 3y + 2z = 4.7 \\ 3x + 4y + 6z = 3.7 \\ x + 3y + 2z = 1.6 \end{cases}$$

Calculemos el determinante de la matriz de coeficientes,

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 48 + 18 + 18 - 8 - 108 - 18 = -50 \neq 0 \rightarrow \text{S.C.D.}$$

Resolvemos por Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4.7 & 3 & 2 \\ 3.7 & 4 & 6 \\ 1.6 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{-50} = \frac{F_1 - F_3}{-50} = \frac{\begin{vmatrix} 3.1 & 0 & 0 \\ 3.7 & 4 & 6 \\ 1.6 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{-50} = \frac{3.1 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{-50} = \frac{3.1(8-18)}{-50} = \frac{-31}{-50} = 0.62$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 4.7 & 2 \\ 3 & 3.7 & 6 \\ 1 & 1.6 & 2 \end{vmatrix}}{-50} = \frac{C_3 - 2C_1}{-50} = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 4.7 & -10 \\ 3 & 3.7 & 0 \\ 1 & 1.6 & 0 \end{vmatrix}}{-50} = \frac{-10 \begin{vmatrix} 3 & 3.7 \\ 1 & 1.6 \end{vmatrix}}{-50} = \frac{48 - 3.7}{5} = \frac{11}{5} = 0.22$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 3 & 4.7 \\ 3 & 4 & 3.7 \\ 1 & 3 & 1.6 \end{vmatrix}}{-50} = \frac{38.4 + 42.3 + 11.1 - 18.8 - 66.6 - 14.4}{-50} = \frac{-8}{-50} = 0.16$$

La solución es: hay que poner un 62% de Migato, un 22% de Catomeal y un 16% de Comecat.

EJERCICIO B

PROBLEMA 2. Dados los planos $\pi: 5x - y - z = 0$, $\sigma: x + y - z = 0$ y el punto $P(9, 4, -1)$, determinar:

- La ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a π y a σ (1,5 puntos).
- El punto simétrico de P respecto de la recta r , intersección de los planos π y σ (1,8 puntos).

Solución:

a) Obtenemos los vectores perpendiculares a los planos dados,

$$\vec{u}(5, -1, -1) \text{ luego } \vec{u} \perp \pi; \quad \vec{v}(1, 1, -1) \text{ luego } \vec{v} \perp \sigma$$

Para obtener un vector perpendicular a los planos π y σ calculamos el producto vectorial de los vectores anteriores,

$$\vec{u} \times \vec{v} \perp \begin{cases} \vec{u} \\ \vec{v} \end{cases} \Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} \perp \begin{cases} \pi \\ \sigma \end{cases}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(1+1) - \vec{j}(-5+1) + \vec{k}(5+1) =$$

$$= (2, 4, 6)$$

El plano de ecuación $2x + 4y + 6z + D = 0$ será perpendicular a los planos π y σ , como debe pasar por el punto $(9, 4, -1)$,

$$2 \cdot 9 + 4 \cdot 4 + 6 \cdot (-1) + D = 0$$

$$18 + 16 - 6 + D = 0$$

$$D = -28$$

El plano pedido es $2x + 4y + 6z - 28 = 0$, ecuación que podemos simplificar por 2,

$$x + 2y + 3z - 14 = 0$$

La ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a π y a σ es: $x + 2y + 3z - 14 = 0$

b) Para resolver este apartado seguiremos el siguiente proceso:

1º) Cálculo del plano que contiene a P y es $\perp$ a $r \equiv \psi$

2º) Cálculo del punto de corte entre r y $\psi \equiv M$

3º) Cálculo del simétrico de P , P' , sabiendo que M es el punto medio entre P y P' .

1º) El vector director de r será perpendicular a ψ

Conocemos la recta r como intersección de dos planos, calculemos su ecuación paramétrica,

$$r: \begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$\text{Como } \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 1 = 6 \neq 0 \quad \begin{cases} 5x - y = z \\ x + y = z \end{cases}$$

$$\text{sumando: } 6x = 2z \rightarrow x = \frac{z}{3}$$

$$\text{sustituyendo en la 2ª ecuación: } \frac{z}{3} + y = z \rightarrow y = z - \frac{z}{3} = \frac{2z}{3}$$

$$\text{La ecuación paramétrica de } r: \begin{cases} x = \frac{1}{3}\lambda \\ y = \frac{2}{3}\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\text{y el vector director de } r: \vec{v}_r = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1 \right) \text{ o bien } \vec{v}_r = (1, 2, 3)$$

La ecuación del plano Ψ será $x + 2y + 3z + D = 0$, como P está en el plano:

$$9 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-1) + D = 0$$

$$9 + 8 - 3 + D = 0$$

$$d = -14$$

La ecuación del plano Ψ es $x + 2y + 3z - 14 = 0$

2º) El punto de corte entre la recta r y el plano Ψ lo encontramos resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de r y Ψ ,

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 5z - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \end{cases} \quad \text{Como} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 10 - 1 - 1 - 15 + 2 = -28 \neq 0 \quad \text{es un S.C.D.}$$

lo resolvemos por Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{-28} = \frac{14 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}{-28} = \frac{14(-1-1)}{-28} = \frac{-28}{-28} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \end{vmatrix}}{-28} = \frac{-14 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}}{-28} = \frac{-14(-1+5)}{-28} = \frac{-56}{-28} = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \end{vmatrix}}{-28} = \frac{14 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}}{-28} = \frac{14(-1-5)}{-28} = \frac{14(-6)}{-28} = 3$$

Por lo tanto $M(1, 2, 3)$

3º) Por ser M el punto medio del segmento PP' , se cumple, $M = \frac{P + P'}{2}$

$$\text{luego } P' = 2M - P = 2(1, 2, 3) - (9, 4, -1) = (2, 4, 6) - (9, 4, -1) = (-7, 0, 7)$$

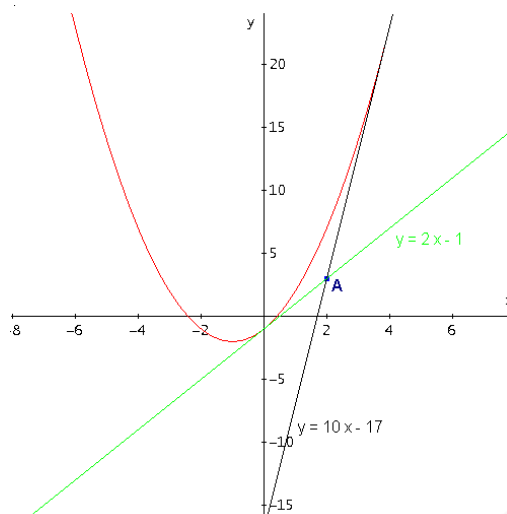
Finalmente, el punto simétrico de P respecto de la recta r , intersección de los planos π y σ , es $(-7, 0, 7)$

EJERCICIO B

PROBLEMA 3. En el plano se tiene la curva $y = x^2 + 2x - 1$. Encontrar razonadamente las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $(2, 3)$ y son tangentes a dicha curva (3,3 puntos).

Solución:

La solución gráfica del problema es:



Las rectas que pasan por el punto $(2, 3)$ tienen por ecuación: $y = m(x - 2) + 3$, siendo “ m ” la pendiente de la recta. Para que estas rectas sean tangentes a la curva $y = x^2 + 2x - 1$ deben tocarla en un único punto.

Estudiemos el corte entre la curva y la recta,

$$x^2 + 2x - 1 = m(x - 2) + 3$$

$$x^2 + 2x - 1 = mx - 2m + 3$$

$$x^2 + 2x - mx - 1 + 2m - 3 = 0$$

$$x^2 + (2 - m)x + (2m - 4) = 0$$

Para que esta ecuación de 2º grado tenga una única solución, su discriminante debe ser cero, es decir:

$$(2 - m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2m - 4) = 0$$

$$4 - 4m + m^2 - 8m + 16 = 0$$

$$m^2 - 12m + 20 = 0$$

$$m = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20}}{2 \cdot 1} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 80}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{12 \pm 8}{2} = \begin{cases} \frac{12+8}{2} = 10 \\ \frac{12-8}{2} = 2 \end{cases}$$

Hay dos rectas tangentes:

para $m = 10$, $y = 10(x - 2) + 3$; $y = 10x - 17$

para $m = 2$, $y = 2(x - 2) + 3$; $y = 2x - 1$

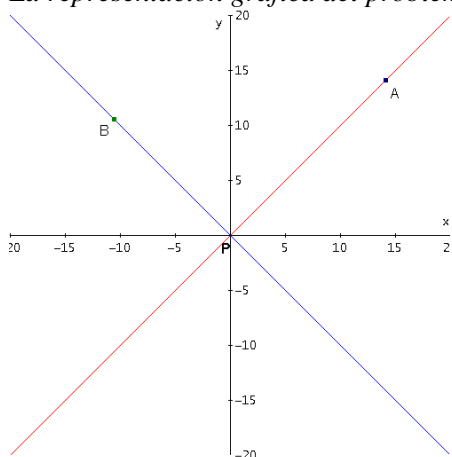
EJERCICIO B

PROBLEMA 4.1. El trazado de dos canales navegables en un mapa discurre según las rectas $y=x$ e $y=-x$. Dos lanchas motoras, A y B, salen al mismo tiempo de puntos situados sobre cada uno de los canales a distancias de 20 y 15 km, respectivamente, del punto P de confluencia de ambos. La lancha A se dirige a P con una velocidad de 30 km/h y la lancha B se dirige a ese mismo punto con velocidad 60 km/h. Se considera despreciable la anchura de los canales y la longitud de las lanchas y se pide calcular:

- La distancia entre las lanchas en función del tiempo desde que inician su recorrido (2,3 puntos).
- La distancia mínima a la que pueden estar las lanchas (1 punto).

Solución:

La representación gráfica del problema es:



El punto A puede estar en el primer o tercer cuadrante; el B en el segundo o cuarto. Como los canales son perpendiculares, independientemente del cuadrante en que estén la solución se obtiene a partir de los mismos cálculos.

Como las rectas $y = x$ e $y = -x$ son perpendiculares los segmentos PA y PB son perpendiculares, por lo tanto

$$d(A,B) = \sqrt{PA^2 + PB^2}$$

Como la lancha A se dirige al punto P a 30 km/h $PA(t) = 20 - 30t$

Como la lancha B se dirige al punto P a 60 km/h $PB(t) = 15 - 60t$

a)

$$\begin{aligned} d(A,B)(t) &= \sqrt{(20-30t)^2 + (15-60t)^2} = \sqrt{400 - 1200t + 900t^2 + 225 - 1800t + 3600t^2} = \\ &= \sqrt{4500t^2 - 3000t + 625} \end{aligned}$$

Por construcción el dominio de esta función debe ser $\mathbb{R}^+$. Vamos a comprobarlo,

$$4500t^2 - 3000t + 625 \geq 0$$

Resolvemos,

$$4500t^2 - 3000t + 625 = 0$$

$$x = \frac{3000 \pm \sqrt{9000000 - 4 \cdot 4500 \cdot 625}}{9000} = \frac{3000 \pm \sqrt{9000000 - 11250000}}{9000} = \frac{3000 \pm \sqrt{-2250000}}{9000}$$

La ecuación no tiene soluciones reales, como el coeficiente de t^2 es positivo el polinomio de 2º grado siempre es positivo.

b) Busquemos el mínimo de la función anterior,

$$d'(A,B)(t) = \frac{9000t - 3000}{2\sqrt{4500t^2 - 3000t + 625}}$$

Estudiemos el signo de la derivada. Ya sabemos que el denominador es positivo, sólo necesitamos estudiar el signo del denominador,

$$9000t - 3000 = 0 \rightarrow 9000t = 3000 \rightarrow t = \frac{3000}{9000} = \frac{1}{3}$$

Para $t < 1/3$ $d' < 0$; para $t > 1/3$ $d' > 0$. En $t = 1/3$ hay un mínimo relativo.

Como la función pasa de decreciente ($d' < 0$) a creciente ($d' > 0$), el mínimo relativo es el absoluto.

$$d(A,B)\left(\frac{1}{3}\right) = \sqrt{4500\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 3000\frac{1}{3} + 625} = \sqrt{500 - 1000 + 625} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5} \approx 11180$$

La distancia mínima a la que pueden estar las lanchas es de $5\sqrt{5}$ Km. que aproximadamente son 11'180 Km.

Tu Profe al Rescate

EJERCICIO B

PROBLEMA 4.2. El peso de los estudiantes de una universidad se distribuye normalmente, con media aritmética 65 kilos y desviación típica 1,5 kilos. Obtener razonadamente:

- a) El tanto por ciento de estudiantes con peso entre 63,5 y 68 kilos (1,5 puntos).
- b) La probabilidad de que al elegir al azar 3 estudiantes dos pesen más de 68 kilos (1,8 puntos).

Solución:

Llamando $M =$ peso de los estudiantes, sabemos que $M = N(65, 1,5)$.

a)

$$\begin{aligned} P(63,5 < M < 68) &= P\left(\frac{63,5 - 65}{1,5} < \frac{M - 65}{1,5} < \frac{68 - 65}{1,5}\right) = P(-1 < Z < 2) = P(Z < 2) - P(Z < -1) = \\ &= P(Z < 2) - [1 - P(Z < 1)] = 0,9772 - 1 + 0,8413 = 0,8185 \end{aligned}$$

Por lo tanto el 81,85% de los estudiantes tendrá un peso entre 63,5 y 68 kilos.

b)

$$P(M > 68) = P\left(\frac{M - 65}{1,5} > \frac{68 - 65}{1,5}\right) = P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$$

Llamamos $X =$ número de estudiantes que pesan más de 68 kilos de un grupo de tres.

$X = B(3, 0,0228)$

$$P(X = 2) = \binom{3}{2} 0,0228^2 0,9772 = 0,0015$$

Luego la probabilidad pedida es 0,0015.