

Convocatoria ordinaria de 2022

Resolución de los ocho ejercicios con justificación y resultados exactos.

Ejercicio 1

Como la función es continua en los puntos de cambio, igualamos los valores de las expresiones contiguas.

$$\frac{1}{-1} = -a + b, \quad a + b = \frac{1}{2}.$$

De la primera ecuación, $-a + b = -1$. Sumando ambas ecuaciones se obtiene $2b = -\frac{1}{2}$, luego $b = -\frac{1}{4}$ y $a = \frac{3}{4}$. Para las asíntotas, en la rama $x < -1$ se tiene $f(x) = 1/x$, así que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$: hay una asíntota horizontal $y = 0$ hacia $-\infty$. En $x = -1$ las ramas tienen límite finito -1 , y en $x = 1$ el valor también es finito; no hay asíntotas verticales. Para $x \geq 1$,

$$\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x-1)) = 0,$$

por lo que la asíntota oblicua hacia $+\infty$ es $y = x - 1$.

Ejercicio 2

Las curvas se cortan cuando $4 - \frac{x^2}{3} = \frac{x^2}{6} - 2$, es decir, $x = \pm 2\sqrt{3}$. Por simetría, un rectángulo inscrito con semibase t tiene anchura $2t$ y altura dada por la diferencia entre las curvas:

$$H(t) = \left(4 - \frac{t^2}{3}\right) - \left(\frac{t^2}{6} - 2\right) = 6 - \frac{t^2}{2}, \quad 0 < t < 2\sqrt{3}.$$

Así, $A(t) = 2tH(t) = 12t - t^3$. Para maximizar el área buscamos los puntos críticos:

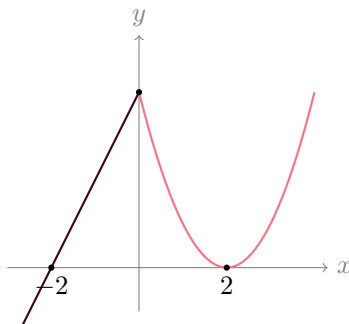
$$A'(t) = 12 - 3t^2 = 0 \implies t = 2$$

(en el dominio solo es válida la raíz positiva). Además $A''(2) = -12 < 0$, de modo que se trata de un máximo. La anchura es 4 y la altura $H(2) = 4$. Por tanto, las dimensiones son $\boxed{4 \times 4}$.

Ejercicio 3

La rama lineal se anula en $2x + 4 = 0$, o sea, en $x = -2$; la rama parabólica se anula en $x = 2$. La función es no negativa entre esos cortes y no negativa fuera de ellos salvo en $(-\infty, -2)$, donde es negativa. El recinto acotado con el eje X consta de los intervalos $[-2, 0]$ y $[0, 2]$; en cada uno integramos el valor absoluto correspondiente:

$$S = \int_{-2}^0 (2x+4) dx + \int_0^2 (x-2)^2 dx = [x^2 + 4x]_{-2}^0 + \left[\frac{(x-2)^3}{3}\right]_0^2 = 4 + \frac{8}{3} = \boxed{\frac{20}{3}}.$$



Ejercicio 4

Como $x \neq 1$, escribimos $u = x - 1$ y descomponemos el integrando:

$$\frac{x^3}{(x-1)^2} = \frac{(u+1)^3}{u^2} = u + 3 + \frac{3}{u} + \frac{1}{u^2}.$$

Integramos término a término y volvemos a x :

$$F(x) = \frac{(x-1)^2}{2} + 3(x-1) + 3 \ln |x-1| - \frac{1}{x-1} + C.$$

La condición $F(2) = 6$ da $\frac{1}{2} + 3 - 1 + C = 6$, luego $C = \frac{7}{2}$. La primitiva pedida es

$$F(x) = \frac{(x-1)^2}{2} + 3(x-1) + 3 \ln |x-1| - \frac{1}{x-1} + \frac{7}{2}.$$

Ejercicio 5

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ -m & 3 & -1 \\ 1 & -4 & m \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m & -3 \\ -m & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & m & -6 \end{pmatrix}.$$

Calculando el determinante,

$$\det A = 3(m-1)(m+1).$$

Si $m \neq \pm 1$, $\text{rg}(A) = 3$, y por Rouché-Frobenius el sistema es compatible determinado. Para los valores singulares:

- Si $m = -1$, la reducción de A^* da $x - z = -2$, $y = 1$ y una fila nula; ambos rangos son $2 < 3$, así que es compatible indeterminado: $(x, y, z) = (t - 2, 1, t)$.
- Si $m = 1$, la matriz de coeficientes tiene rango 2, pero la ampliada tiene rango 3 (aparece una fila $0 = 1$). Es incompatible.

Para $m = 2$, resolvemos el sistema y obtenemos $(x, y, z) = (2, 1, -2)$.

Ejercicio 6

La matriz es invertible exactamente cuando su determinante es distinto de cero. Al desarrollar por la primera fila y simplificar, teniendo en cuenta $m \geq 0$,

$$\det A = m(m-1)^2(m+1)^2.$$

Se anula para $m = 0$ y $m = 1$; por tanto, A tiene inversa si $m > 0$, $m \neq 1$. Para $m = 4$, la ecuación $AX = 12I$ se resuelve multiplicando por A^{-1} : $X = 12A^{-1}$. La matriz correspondiente es

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

La comprobación directa da $AX = 12I$.

Ejercicio 7

La ortogonalidad se expresa mediante producto escalar nulo:

$$(1, a, b) \cdot (-1, 2, 3) = -1 + 2a + 3b = 0, \quad (1, a, b) \cdot (2, 0, -1) = 2 - b = 0.$$

De la segunda ecuación $b = 2$, y entonces $a = -\frac{5}{2}$. Para el paralelogramo, buscamos dos lados adyacentes en las direcciones dadas cuya suma sea la diagonal $\overrightarrow{OA} = (-4, 4, 7)$. Se verifica que

$$2\vec{u} - \vec{v} = 2(-1, 2, 3) - (2, 0, -1) = (-4, 4, 7) = \overrightarrow{OA}.$$

Así, tomando O como vértice, los otros vértices son $2\vec{u} = (-2, 4, 6)$, $A = (-4, 4, 7)$ y $-\vec{v} = (-2, 0, 1)$. Los cuatro son $(0, 0, 0)$, $(-2, 4, 6)$, $(-4, 4, 7)$, $(-2, 0, 1)$.

Ejercicio 8

Parametrizamos r como $(2+t, -t, 1+2t)$, con vector director $(1, -1, 2)$. La recta s pasa por $P = (1, 2, 3)$ y tiene director $(1+a, -a, 3a)$. Para que se corten, igualamos sus coordenadas:

$$(2+t, -t, 1+2t) = (1, 2, 3) + \lambda(1+a, -a, 3a).$$

Al resolver las tres ecuaciones se obtiene $a = 6$, $t = -8$ y $\lambda = -1$, por lo que el punto de corte es $(-6, 8, -15)$. Para que sean perpendiculares, sus vectores directores deben tener producto escalar nulo:

$$(1, -1, 2) \cdot (1+a, -a, 3a) = 1+8a = 0,$$

por lo que $a = -\frac{1}{8}$.