

Resolvemos ambas opciones de los apartados 1 y 2 y las cuatro cuestiones del problema común.

Problema 1 · Posiciones y coste de máquinas

A) Como $A < 0 < B < C$, las distancias son $B - A$, C y $C - A$, B . Las condiciones del enunciado se traducen en

$$A + B + C = 3000, \quad B - A = 2C, \quad C - A = 3B.$$

De las dos últimas ecuaciones, $A = B - 2C = C - 3B$, luego $4B = 3C$. Sustituyendo $C = 4B/3$ y $A = -5B/3$ en la suma, obtenemos $2B/3 = 3000$. Por tanto,

$$A = -7500, \quad B = 4500, \quad C = 6000.$$

B) Sean x e y las horas de las máquinas A y B. Las producciones mínimas exigen

$$2x + 9y \geq 80, \quad 8x + 4y \geq 96, \quad 4x + 10y \geq 120, \quad x, y \geq 0.$$

Minimizamos $C = 250x + 600y$. Las intersecciones factibles de restricciones son $(17,5, 5)$ y $(7,5, 9)$; sus costes son 7375 € y 7275 €. Los vértices sobre los ejes son $(40, 0)$ y $(0, 24)$, con costes 10000 € y 14400 €. El menor valor corresponde a $(7,5, 9)$.

$$\text{Máquina A: } 7,5 \text{ h; máquina B: } 9 \text{ h; } C_{\min} = 7275 \text{ €}.$$

Problema 2 · Concentración y activos de una empresa

A) La continuidad se comprueba en el único punto de cambio, $t = 6$. El valor por la izquierda es $-6^2 + 8(6) + a = 12 + a$, y por la derecha

$$\frac{12(6) + 89}{6 + 1} = 23.$$

Así, $a = 11$. En $[0, 6]$ la función es $-t^2 + 8t + 11$, cuya parábola alcanza el máximo en el vértice $t = 4$, con $C(4) = 27$. Para $6 < t \leq 15$,

$$C(t) = 12 + \frac{77}{t+1}, \quad C'(t) = -\frac{77}{(t+1)^2} < 0.$$

Este tramo decrece desde el valor 23 hasta $C(15) = 269/16$, por lo que no supera el máximo 27.

La alerta se activa cuando $C(t) > 20$. En el primer tramo,

$$-t^2 + 8t + 11 > 20 \iff t^2 - 8t + 9 < 0,$$

lo que da $4 - \sqrt{7} < t < 4 + \sqrt{7}$; al limitarlo a $[0, 6]$ queda $(4 - \sqrt{7}, 6]$. En el segundo tramo, $12 + 77/(t+1) > 20$ equivale a $t < 69/8$. Unimos ambos intervalos usando la continuidad en 6.

$$a = 11; \quad C_{\max} = 27 \text{ ppm en } t = 4; \quad C \text{ decrece en } (6, 15]; \quad \text{alerta en } \left(4 - \sqrt{7}, \frac{69}{8}\right).$$

B) Del valor inicial $f(0) = 4$ se obtiene $B = 4$. Como $f(1) = 3$, se cumple $A + B/2 = 3$, luego $A = 1$ y $f(x) = x + 4/(x+1)$.

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}.$$

En el dominio $[0, 5]$, la función decrece hasta $x = 1$ y crece desde ahí. Sus valores extremos son $f(1) = 3$ y $f(5) = 17/3$. Para que los activos superen 4 millones:

$$f(x) > 4 \iff \frac{x(x-3)}{x+1} > 0,$$

que en $[0, 5]$ ocurre cuando $3 < x \leq 5$. Finalmente, $(x+1)f(x) = x^2 + x + 4$, de modo que

$$\int_2^3 (x+1)f(x) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x \right]_2^3 = \frac{77}{6}.$$

$$A = 1, B = 4; \quad f_{\min} = 3 \text{ en } x = 1; \quad f_{\max} = \frac{17}{3} \text{ en } x = 5; \quad f > 4 \text{ si } 3 < x \leq 5; \quad \text{área} = \frac{77}{6}.$$

Problema 3 · Vídeos virales

Sean T «creador talentoso» y V «vídeo viral». Aplicamos la probabilidad total:

$$P(V) = P(T)P(V | T) + P(T^c)P(V | T^c) = 0,30 \cdot 0,5 + 0,70 \cdot 0,05 = 0,185.$$

Por Bayes,

$$P(T | V) = \frac{0,30 \cdot 0,5}{0,185} = \frac{30}{37}.$$

Si un creador no talentoso publica cuatro vídeos, el número viral sigue $X \sim \text{Bin}(4, 0,05)$. «Dos o más» es el complemento de cero o uno:

$$P(X \geq 2) = 1 - (0,95)^4 - 4(0,05)(0,95)^3 = 0,01401875.$$

Para 100 vídeos de un creador talentoso, $Y \sim \text{Bin}(100, 0,5)$, con media 50 y desviación típica 5. Mediante la aproximación normal y corrección de continuidad,

$$P(Y \geq 40) \approx P\left(Z \geq \frac{39,5 - 50}{5}\right) = \Phi(2,1) \approx 0,9821.$$

La suma binomial exacta vale aproximadamente 0,9824; la diferencia se debe a que la aproximación normal no es exacta.

$$P(V) = 0,185; \quad P(T | V) = \frac{30}{37}; \quad P(X \geq 2) = 0,01401875; \quad P(Y \geq 40) \approx 0,9821 \text{ (normal)}, \quad 0,9824 \text{ (exacta)}.$$