

Examen de Matemáticas II (Selectividad - Modelo 2026)

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a cinco preguntas, tres de ellas obligatorias y dos de ellas a escoger entre dos opciones. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

Pregunta 1 (2 puntos) Un equipo de ingenieros está trabajando en un nuevo modelo de dron para tomar fotografías del estado del tráfico. Elegido un sistema de coordenadas, el dron tiene $A(1, 0, 2)$ como punto de partida y un cierto tramo de autopista está contenido en el plano $\pi : x + y + 2z + 1 = 0$. Las fotografías se deben tomar perpendicularmente al plano π . Se toma el punto $C(0, -3, 1)$ de π para calibrar el dron.

- a) (1 punto) Determine la distancia del dron en el punto de partida A al plano π y halle una ecuación del plano en el que el dron vuela manteniendo en todo momento la misma distancia al plano π . Este plano recibe el nombre de plano de vuelo.
- b) (1 punto) Responda solo a uno de los dos apartados siguientes:
 - a.1 El dron se mueve en línea recta en el plano de vuelo desde el punto de partida A al punto más cercano a C . Halle una ecuación de la recta que contiene la trayectoria lineal que recorre el dron para fotografiar C .
 - a.2 La fotografía obtenida de C a esa distancia no tiene buena definición. Se decide acercar el dron desde el punto de partida A descendiendo perpendicularmente al plano π para situarse en A' , a la mitad de la distancia original. Calcule el ángulo formado por el plano π y la recta que pasa por C y A' .

Pregunta 2 (2 puntos) Dada $f(x) = \frac{x^2 + 1}{|x| + 1}$, se pide:

- a) (1 punto) Analizar la paridad y los extremos relativos de $f(x)$.
- b) (1 punto) Hallar $\int_{-1}^0 f(x) dx$.

Pregunta 3 (2,5 puntos) Una envasadora de aceitunas comercializa bolsas con 12 aceitunas. La cosecha de este año ha sido atacada por el hongo *Sphaeropsis dalmatica* y una de cada veinte aceitunas presenta la enfermedad escudete. Se pide:

- a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que una bolsa no tenga aceitunas con la enfermedad.
- b) (1 punto) Los controles sanitarios han fallado y se han distribuido 100 bolsas de aceitunas de esta cosecha. Calcular, aproximando por una distribución normal adecuada, la probabilidad de que al menos el 60 % de las bolsas distribuidas tenga alguna aceituna con escudete.

Pregunta 4 (2 puntos) Responda a uno de los dos apartados siguientes a) o b)

- a) (2 puntos) Sean $a \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} 2a & -2 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Se pide:
- a.1 (1 punto) Calcular, si existen, los valores de a tales que la matriz AA^t sea una matriz diagonal.
- a.2 (1 punto) Calcular, si existen, los valores de a tales que $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$.
- b) (2 puntos) Sea el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + \lambda y + z = 7 \\ x + 2y + \lambda z = 2 \end{cases}$. Se pide:
- b.1 (1 punto) Discutir el sistema en función del parámetro real λ .
- b.2 (1 punto) Resolver el sistema si $\lambda = -1$.

Pregunta 5 (2 puntos) **Responda a uno de los dos apartados siguientes a) o b)**

- a) Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(-8 + \cos x) & \text{si } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ a \sin x + 4 & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \\ 2 \sin(2x) + b & \text{si } \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$$

- a.1 (1 punto) Halle los valores de a y b para que se verifiquen las hipótesis del Teorema de Bolzano en $[0, 2\pi]$.
- a.2 (1 punto) Justifique razonadamente que la función $f(x)$ tiene una única raíz en el intervalo $(0, 2\pi)$ y calcule dicha raíz.

- b) Se considera la función $\begin{cases} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Se pide:

- b.1 (1 punto) Determinar si $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.
- b.2 (1 punto) Determinar si $f(x)$ es derivable en el punto $x = 0$ y, si existe, calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ para $x = 0$.