

Modelo 1 de 2007

Soluciones desarrolladas · PAU Andalucía

Opción A · Ejercicio 1

La función está definida para $x > 0$. Su derivada permite estudiar el crecimiento y sus ceros, junto con los cambios de signo, determinan los extremos:

$$f'(x) = 3 - \frac{1}{2x^{3/2}} = \frac{6x^{3/2} - 1}{2x^{3/2}}.$$

El denominador es positivo y $f'(x) = 0$ equivale a $x = 6^{-2/3}$. Por tanto, $f' < 0$ antes de ese valor y $f' > 0$ después. Hay un mínimo relativo en

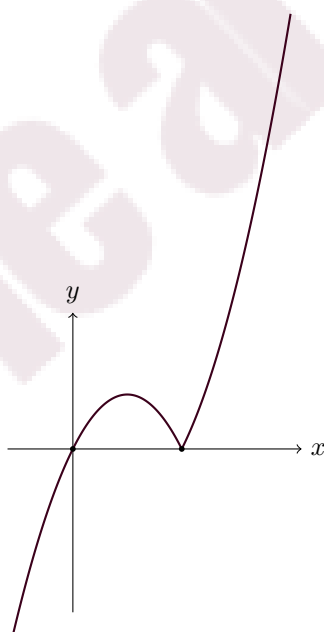
$$x = 6^{-2/3}, \quad f(x) = 3 \cdot 6^{-2/3} + 6^{1/3} = \frac{3\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{4}}.$$

Para estudiar la inflexión calculamos $f''(x) = \frac{3}{4x^{5/2}} > 0$ en todo el dominio. La concavidad no cambia de sentido, así que la gráfica no tiene punto de inflexión.

Opción A · Ejercicio 2

Escribimos el valor absoluto por tramos:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x^2, & x \leq 2, \\ x^2 - 2x, & x > 2. \end{cases}$$



En $x = 2$ ambas ramas valen 0, así que la función es continua. Las derivadas laterales son $f'_-(2) = 2 - 2(2) = -2$ y $f'_+(2) = 2(2) - 2 = 2$. Al no coincidir, f no es derivable en 2. La gráfica corta al eje X en $x = 0$ y $x = 2$; entre esos puntos está sobre el eje y forma el único recinto acotado con él. Su área es

$$A = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Opción A · Ejercicio 3

a)

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & m \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A - I)^2 = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} = mI.$$

Para que sea la matriz nula debe ser $m = 0$.

b) Con $m = 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $\det A = -1$, por lo que es invertible. De $AX = 2A^T$ se obtiene $X = 2A^{-1}A^T$. Como

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

resulta

$$X = 2 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Opción A · Ejercicio 4

El vector director del segmento es $\overrightarrow{AB} = B - A = (-1 - 1, 0 - 2, 3 - 1) = (-2, -2, 2)$. Los puntos que lo dividen en tres partes iguales son $A + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ y $A + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$:

$$P_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3} \right), \quad P_2 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{3} \right).$$

El plano pedido tiene como vector normal uno paralelo a $\overrightarrow{AB}$ y pasa por el punto medio $M = (0, 1, 2)$. Con normal $(1, 1, -1)$,

$$x + y - z + D = 0, \quad 0 + 1 - 2 + D = 0 \implies D = 1.$$

Así, el plano es $\boxed{x + y - z + 1 = 0}$.