

BAREMO DEL EXAMEN: Cada problema se puntuará hasta 2,5 puntos.

La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema.

Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculos simbólicos ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

A partir de la tercera falta de ortografía se deducirán -0,10 puntos hasta un máximo de un punto.

Por errores en la redacción, en la presentación, falta de coherencia, falta de cohesión, incorrección léxica e incorrección gramatical se podrá deducir un máximo de medio punto.

**En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.**

### **PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)**

Durante la semana cultural de un centro docente, el Departamento de Matemáticas organiza un juego de azar por rondas en el que los alumnos pueden obtener puntos canjeables por pequeños premios. En cada ronda se lanza primero una moneda y, a continuación, un dado de seis caras. El resultado de la moneda combinado con el valor obtenido por el dado determina la condición para ganar la ronda:

- Si la moneda sale cara, el alumno gana la ronda si el número obtenido en el dado es mayor o igual que 5.
- Si la moneda sale cruz, el alumno gana la ronda si el número obtenido en el dado es par.

Cada ronda es independiente y sigue exactamente este mismo procedimiento. Se pide:

#### **Responda a todos los apartados**

- 1.1 **(0.5 puntos)** Calcular la probabilidad de que, en una ronda cualquiera, el alumno gane.
- 1.2 **(1 punto)** Sabiendo que en una ronda el alumno ha ganado, ¿cuál es la probabilidad de que en el lanzamiento de la moneda haya salido cara?
- 1.3 **(1 punto)** Si se utiliza una moneda trucada tal que al lanzarla siempre se obtiene cara, y se realizan exactamente 7 rondas del juego, calcular la probabilidad de que el alumno gane exactamente 5 veces.

### **PREGUNTA 2: ÁLGEBRA (2,5 puntos)**

#### **Responda al apartado 2.1 o al apartado 2.2**

2.1 Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} \alpha x + y - z = 0 \\ x + \alpha y + z = 1 \\ -x + y + \alpha z = 2 \end{cases}.$$

Se pide:

2.1.1 (1 punto) Discutir el sistema según los valores del parámetro real  $\alpha$ .

2.1.2 (1.5 puntos) Encontrar la solución del sistema cuando este sea compatible.

---

2.2 Una entidad financiera utiliza modelos matriciales para simular el riesgo de una cartera de inversión compuesta por dos tipos de activos. La matriz de simulación es

$$A = \begin{pmatrix} 1-\alpha & 1 \\ 1 & 1+\alpha \end{pmatrix}$$

donde  $\alpha$  es un parámetro real de ajuste que refleja la volatilidad histórica del mercado.

2.2.1 (1 punto) El riesgo óptimo se obtiene cuando se verifica la ecuación  $A^2 - I = 2A$ , donde

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Determinar para qué valores de } \alpha \text{ se optimiza el riesgo.}$$

2.2.2 (1.5 puntos) En determinadas condiciones de mercado, resulta conveniente invertir la simulación deshaciendo los cálculos previamente realizados. Para ello se necesita que la matriz de simulación admita inversa. Obtener los valores de  $\alpha$  para los cuales se cumple esta última condición y calcular la inversa de la matriz de simulación en función del parámetro  $\alpha$ .

### PREGUNTA 3: GEOMETRÍA (2,5 puntos)

Responda al apartado 3.1 o al apartado 3.2

3.1 Sean las rectas  $r: \begin{cases} 2x + y = \alpha \\ z = 1 \end{cases}$  y  $s: \begin{cases} -x + 2y + 2z = 5 \\ x + z = \alpha \end{cases}$ . Se pide:

3.1.1 (1 punto) Estudiar, según el valor de  $\alpha$ , la posición relativa de las dos rectas.

3.1.2 (1 punto) Calcular, si es posible, el valor de  $\alpha$  para que las rectas se corten y, en ese caso, encontrar el punto de corte  $P$ .

3.1.3 (0.5 puntos) Calcular la distancia entre el origen de coordenadas y  $P$ .

---

3.2 Dado el plano  $\pi: 2x + y - 3 = 0$  y la recta  $r: \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = -1 - 2\alpha \\ z = 1 \end{cases}$ , se pide:

3.2.1 (1.25 puntos) Obtener la ecuación del plano  $\pi_I$  perpendicular a  $\pi$  y que contiene a  $r$ .

3.2.2 (1.25 puntos) Calcular, si existe, un plano  $\pi_2$  paralelo a  $\pi$  que contenga a  $r$ .

#### PREGUNTA 4: ANÁLISIS (2,5 puntos)

##### Responda al apartado 4.1 o al apartado 4.2

4.1 Consideramos la función real de variable real  $f(x) = \sqrt{2x^2 - 3}$  para  $-1 \leq x \leq 5$ . Se pide:

4.1.1 (0.75 puntos) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función  $f$  en el intervalo  $[-1, 5]$ .

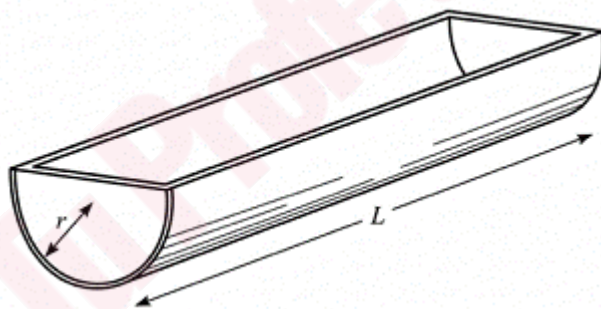
4.1.2 (0.5 puntos) Calcular los valores máximos y mínimos absolutos de la función  $f$  en el intervalo  $[-1, 5]$ .

4.1.3 (0.25 puntos) Representar la función  $f$ .

4.1.3 (1 punto) Calcular el área del recinto limitado por la curva de ecuación  $y = f(x)$ , y las rectas  $x = -1$ ,  $x = 5$  e  $y = 0$ .

---

4.2 Un comedero para animales tiene forma de semicilindro hueco abierto por la parte superior. Está construido con chapa metálica delgada. Los extremos semicirculares tienen radio  $r$  medido en cm y la longitud del comedero es de  $L$  cm. El área total del semicilindro (incluyendo el área lateral curva y el área de las paredes semicirculares) es de  $600\pi \text{ cm}^2$ .



Se pide:

4.2.1 (1 punto) Encontrar la función que describe el volumen del comedero en función del radio  $r$ .

4.2.2 (1.5 puntos) Encontrar el radio  $r$  y la longitud  $L$  que maximizan el volumen del comedero y calcular dicho volumen.