

BAREMO DEL EXAMEN: Se elegirá sólo UNA de las dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción.

Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.

La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.

Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica para la realización del examen. Se prohíbe su utilización indebida (para guardar fórmulas en memoria).

Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

PROBLEMA A.1. Se dan $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y M , donde M es una matriz de dos filas y dos columnas que verifica $M^2 = M$.

Obtener **razonadamente**:

- Todos los valores reales k para los que la matriz $B = A - kI$ tiene inversa. (2 puntos)
- La matriz inversa B^{-1} cuando $k = 3$. (2 puntos)
- Las constantes α y β para las que se $\alpha A^2 + \beta A = -2I$ reales α y β verifica que . (4 puntos)
- Comprobar razonadamente que la matriz $P = I - M$ cumple las relaciones: $P^2 = P$ y $MP = PM$. (2 puntos, repartidos en 1 punto por cada igualdad)

PROBLEMA A.2. En el espacio se dan las rectas

$$r: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \quad y \quad s: \begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ 3y - z + 2 + \alpha = 0 \end{cases}$$

Obtener **razonadamente**:

- El valor de α para el que las rectas r y s están contenidas en un plano. (4 puntos)
- La ecuación del plano que contiene a las rectas r y s para el valor de α obtenido en el apartado anterior. (2 puntos)
- La ecuación del plano perpendicular a la recta r que contiene el punto $(1, 2, 1)$. (4 puntos)

PROBLEMA A.3. Dada la función f definida por

$$f(x) = x^2 e^{-x}$$

Obtener **razonadamente**:

- El dominio y el recorrido de la función f . (2 puntos)

- b) Los valores de x donde la función $f(x) = x^2 e^{-x}$ alcanza el máximo relativo y el mínimo relativo. (2 puntos)
- c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de dicha función f . (2 puntos)
- d) Los valores de x donde la función $f(x) = x^2 e^{-x}$ tiene los puntos de inflexión. (2 puntos)
- e) La gráfica de la curva $y = x^2 e^{-x}$, explicando con detalle la obtención de su asíntota horizontal. (2 puntos)

OPCIÓN B

PROBLEMA B.1. Se dan las matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

y T , y se sabe que T es una matriz cuadrada de 3 filas y 3 columnas cuyo determinante vale $\sqrt{2}$.

Calcular **razonadamente** los determinantes de las siguientes matrices, indicando explícitamente las propiedades utilizadas en su cálculo:

- a) $\frac{1}{2}T$ (3 puntos)
- b) M^4 . (3 puntos)
- c) TM^3T^{-1} . (4 puntos)

PROBLEMA B.2. Se da la recta

$$r: \begin{cases} x-4y=0 \\ y-z=0 \end{cases} \text{ y el } \pi_{\alpha}: (2+2\alpha)x + y + \alpha z - 2 - 6\alpha = 0 \text{ dependiente del parámetro } \alpha \text{ real.}$$

Obtener **razonadamente**:

- a) La ecuación del plano π_{α} que pasa por el punto $(1, 1, 0)$. (3 puntos)
- b) La ecuación del plano π_{α} que es paralelo a la recta r . (4 puntos)
- c) La ecuación del plano π_{α} que es perpendicular a la recta r (3 puntos).

PROBLEMA B.3. Un coche recorre el arco de parábola Γ de ecuación $2y = 36 - x^2$, variando la x de -6 a 6 . Se representa por $f(x)$ a la distancia del punto $(0, 9)$ al punto (x, y) del arco Γ donde está situado el coche. Se pide obtener **razonadamente**:

- a) La expresión de $f(x)$. (2 puntos)
- b) Los puntos del arco Γ donde la distancia $f(x)$ tiene mínimos relativos. (2 puntos)
- c) Los valores máximo y mínimo de la distancia $f(x)$. (2 puntos)
- d) El área de la superficie limitada por el arco de parábola Γ y el segmento rectilíneo que une los puntos $(-6, 0)$ y $(6, 0)$. (4 puntos)