

Modelo 4 de 2003

Integrales, extremos, independencia lineal, productos escalares y posiciones relativas.

Opción A - Ejercicio 1

Usamos $\ln(1 - x^2) = \ln(1 - x) + \ln(1 + x)$ para $-1 < x < 1$. Integrando cada término,

$$F(x) = (x - 1) \ln(1 - x) + (x + 1) \ln(1 + x) - 2x + C.$$

La condición de que la primitiva pase por $(0, 1)$ fija $C = 1$. Por tanto,

$$\boxed{F(x) = (x - 1) \ln(1 - x) + (x + 1) \ln(1 + x) - 2x + 1}, \quad -1 < x < 1.$$

Opción A - Ejercicio 2

La condición de extremo en $x = 0$ exige $f'(0) = b = 0$. Un punto de inflexión en $x = -1$ exige $f''(-1) = 0$; como $f''(x) = 6x + 2a$, se obtiene $a = 3$. Entonces $f(x) = x^3 + 3x^2 + c$, y

$$\int_0^1 f(x) dx = \left[\frac{x^4}{4} + x^3 + cx \right]_0^1 = \frac{5}{4} + c = 6,$$

de donde $c = 19/4$. Además, $f'(x) = 3x(x + 2)$ cambia de negativo a positivo en 0, confirmando que allí hay un mínimo relativo. Así,

$$\boxed{a = 3, \quad b = 0, \quad c = \frac{19}{4}}.$$

Opción A - Ejercicio 3

Para que u, v, w sean linealmente independientes, el determinante que forman como columnas debe ser distinto de cero:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix} = 2(a - 2).$$

Por tanto, son independientes si y solo si $\boxed{a \neq 2}$. Para que $u + v$ y $u - w$ sean ortogonales, su producto escalar debe ser cero:

$$\begin{aligned} u + v &= (3, 3, a + 1), & u - w &= (-1, 1, 1), \\ (u + v) \cdot (u - w) &= -3 + 3 + (a + 1) = 0 \implies \boxed{a = -1}. \end{aligned}$$

Opción A - Ejercicio 4

Las rectas tienen vectores directores $d_r = (1, 1, 1)$ y $d_s = (1, 1, -1)$. Sean $A = t(1, 1, 1)$ y $B = (1 + \mu, 3 + \mu, -\mu)$. Para que el segmento de mínima distancia sea perpendicular a ambas rectas, $(B - A)$ debe tener producto escalar cero con los dos vectores directores:

$$(B - A) \cdot d_r = 0, \quad (B - A) \cdot d_s = 0.$$

Al resolver estas condiciones se obtiene $t = 1$ y $\mu = -1$. Los puntos son

$$\boxed{A = (1, 1, 1) \text{ sobre } r, \quad B = (0, 2, 1) \text{ sobre } s}.$$

Opción B - Ejercicio 1

Las curvas se cortan donde $1 + x^2 = 1 + x$, es decir, en $x = 0$ y $x = 1$. En ese intervalo la recta queda por encima de la parábola, de modo que

$$S = \int_0^1 ((1+x) - (1+x^2)) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{6}}.$$

La derivada de la parábola es $2x$. Para que su tangente sea paralela a la recta de pendiente 1, se necesita $2x = 1$, luego el punto de tangencia es $(1/2, 5/4)$. La recta buscada es

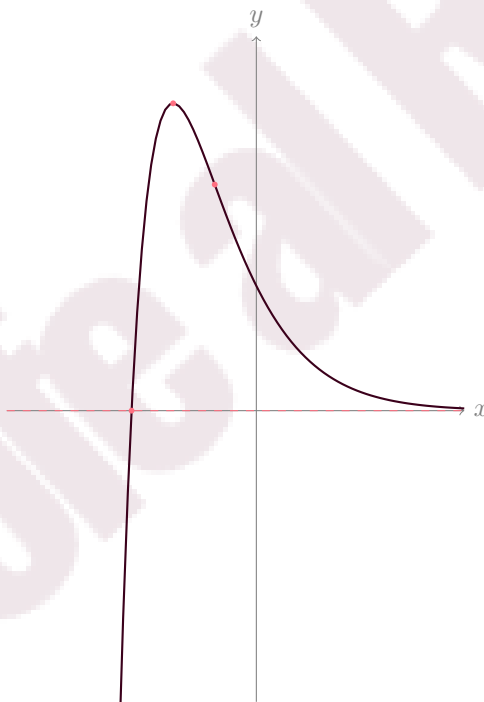
$$y - \frac{5}{4} = x - \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = x + \frac{3}{4}}.$$

Opción B - Ejercicio 2

El dominio es $\mathbb{R}$. No hay asíntotas verticales. Como $(x+3)e^{-x} \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow +\infty$, existe una asíntota horizontal $y = 0$ en ese extremo; cuando $x \rightarrow -\infty$, $f(x) \rightarrow -\infty$ y no hay asíntota horizontal. Derivando,

$$f'(x) = -(x+2)e^{-x}, \quad f''(x) = (x+1)e^{-x}.$$

La derivada es positiva para $x < -2$ y negativa para $x > -2$, por lo que hay un máximo relativo en $(-2, e^2)$. La segunda derivada cambia de signo en $x = -1$, así que hay un punto de inflexión en $(-1, 2e)$; la gráfica es cóncava hacia abajo antes y convexa después. Además, corta el eje x en $(-3, 0)$ y el eje y en $(0, 3)$.



Opción B - Ejercicio 3

Usamos propiedades de determinantes:

$$\det(A^3) = (\det A)^3 = \boxed{125}, \quad \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} = \boxed{\frac{1}{5}},$$

$$\det(2A) = 2^3 \det A = \boxed{40}.$$

En el último caso, el determinante es multilineal respecto de las columnas y cambia de signo al intercambiar dos columnas:

$$\det(3C_1 - C_3, 2C_3, C_2) = 6 \det(C_1, C_3, C_2) - 2 \det(C_3, C_3, C_2) = -6 \det A = \boxed{-30}.$$

Opción B - Ejercicio 4

Parametrizamos la recta como

$$(x, y, z) = (1, -1, 0) + t(2, 1, 3).$$

El plano π_1 tiene ecuación $x + y + z + 3 = 0$. En la representación paramétrica de π_2 , la suma $x + y + z$ es siempre -9 , así que su ecuación general es $x + y + z + 9 = 0$. Como ambos planos son paralelos, un punto equidistante de ellos debe quedar a mitad de camino entre sus valores constantes. En la recta, $x + y + z = 6t$; la condición de equidistancia da $6t = -6$, es decir, $t = -1$. El punto pedido es

$$\boxed{P = (-1, -2, -3)}.$$