

Junio de 2011 · Convocatoria ordinaria

En el examen se escoge una opción, A o B. Aquí resolvemos todos los problemas de ambas opciones. En cada apartado explicamos qué buscamos, qué propiedad usamos y cómo se obtiene el resultado.

Opción A

Problema A.1 · Sistema con parámetro

El sistema es

$$S : \begin{cases} x + y + z = m, \\ 2x + 3z = 2m + 1, \\ x + 3y + (m - 2)z = m - 1. \end{cases}$$

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$C(m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & m - 2 \end{pmatrix}, \quad C^*(m) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m \\ 2 & 0 & 3 & 2m + 1 \\ 1 & 3 & m - 2 & m - 1 \end{array} \right).$$

Determinante y casos. Para decidir cuándo la matriz de coeficientes tiene rango 3, calculamos su determinante por la primera fila:

$$\begin{aligned} \det C(m) &= 1 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & m - 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & m - 2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -9 - (2m - 7) + 6 = 4 - 2m = 2(2 - m). \end{aligned}$$

Por tanto, hay dos casos: si $m \neq 2$, el determinante no es cero; si $m = 2$, el determinante es cero y hay que comparar los rangos.

a) Todas las soluciones cuando $m = 2$. Sustituimos $m = 2$:

$$\begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2x + 3z = 5, \\ x + 3y = 1. \end{cases}$$

Restamos dos veces la primera ecuación a la segunda y la primera a la tercera:

$$z - 2y = 1, \quad 2y - z = -1.$$

Son la misma condición. Tomamos $y = t$, con $t \in \mathbb{R}$. Entonces

$$z = 1 + 2t, \quad x = 2 - y - z = 2 - t - (1 + 2t) = 1 - 3t.$$

Comprobamos los rangos para aplicar Rouché–Frobenius. El menor de orden 2 formado por las dos primeras filas y columnas 1 y 2 vale

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Así, $\text{rg } C(2) \geq 2$; como $\det C(2) = 0$, también $\text{rg } C(2) < 3$, y por tanto $\text{rg } C(2) = 2$. Además, la tercera fila de la ampliada es tres veces la primera menos la segunda, también en el término independiente:

$$(1, 3, 0 \mid 1) = 3(1, 1, 1 \mid 2) - (2, 0, 3 \mid 5).$$

Luego $\text{rg } C^*(2) = 2$. Como ambos rangos coinciden y son menores que el número de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado. La familia completa es

$$(x, y, z) = (1 - 3t, t, 1 + 2t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

b) Valores de m para los que la solución es única. Si $m \neq 2$, entonces $\det C(m) = 2(2 - m) \neq 0$, por lo que $\text{rg } C(m) = 3$. La ampliada tiene tres filas, contiene a $C(m)$ y no puede tener rango mayor que 3; así que $\text{rg } C^*(m) = 3$. Rouché–Frobenius da un sistema compatible determinado. Para $m = 2$ ya vimos que hay infinitas soluciones. Por tanto,

hay solución única exactamente cuando $m \neq 2$.

c) Parámetro para la solución dada. Sustituimos $(x, y, z) = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$ en las ecuaciones:

$$\begin{aligned}x + y + z = m &\implies \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + 0 = m \implies m = 1, \\2x + 3z = 2m + 1 &\implies 3 = 2m + 1 \implies m = 1, \\x + 3y + (m - 2)z = m - 1 &\implies \frac{3}{2} - \frac{3}{2} + 0 = m - 1 \implies m = 1.\end{aligned}$$

Las tres ecuaciones dan el mismo valor, así que la solución indicada pertenece al sistema cuando

$$m = 1.$$

Problema A.2 · Rectas y plano

Las rectas están dadas como intersecciones de planos. Las pasamos a ecuaciones paramétricas para leer un punto y un vector director.

a) Punto y vector director de cada recta. Para r , elegimos $z = t$. De $x + z = 2$ obtenemos $x = 2 - t$. Al sustituir en $2x - y + z = 0$:

$$2(2 - t) - y + t = 0 \implies y = 4 - t.$$

Por tanto, escribimos la recta en forma paramétrica, coordenada a coordenada:

$$r : \begin{cases} x = 2 - t, \\ y = 4 - t, \, t \in \mathbb{R}. \\ z = t, \end{cases}$$

Tomamos $P_r = (2, 4, 0)$ y $\vec{d}_r = (-1, -1, 1)$.

Para s , de $2x - y = 3$ despejamos $y = 2x - 3$. Sustituimos en $x - y - z = 2$:

$$x - (2x - 3) - z = 2 \implies z = 1 - x.$$

Tomando $x = u$, queda la recta en forma paramétrica:

$$s : \begin{cases} x = u, \\ y = 2u - 3, \, u \in \mathbb{R}. \\ z = 1 - u, \end{cases}$$

Así, $P_s = (0, -3, 1)$ y $\vec{d}_s = (1, 2, -1)$.

b) Posición relativa. Primero comprobamos si los vectores directores son proporcionales. No lo son: si $\vec{d}_r = k\vec{d}_s$, la tercera componente exigiría $k = -1$, pero la segunda daría $-1 = -2$, imposible. Equivalentemente, su producto vectorial no es nulo. Luego las rectas no son paralelas.

Para ver si se cortan igualamos sus ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} 2 - t = u, \\ 4 - t = -3 + 2u, \\ t = 1 - u. \end{cases}$$

De la primera ecuación $u = 2 - t$. La tercera exigiría $t = 1 - (2 - t) = t - 1$, es decir, $0 = -1$, imposible. No se cortan. Como no son paralelas ni secantes, son **rectas cruzadas**.

c) Plano que contiene a r y es paralelo a s

El plano debe contener el punto $P_r = (2, 4, 0)$ y las direcciones $\vec{d}_r$ y $\vec{d}_s$. Un vector normal se obtiene con el producto vectorial:

$$\vec{n} = (\vec{d}_r \times \vec{d}_s) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1, 0, -1).$$

La fórmula del plano general con normal (A, B, C) que pasa por (x_0, y_0, z_0) es $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. Sustituimos:

$$-(x - 2) - 0(y - 4) - (z - 0) = 0 \implies x + z - 2 = 0.$$

Comprobación: todo punto de r cumple $x + z = 2$, y $\vec{n} \cdot \vec{d}_s = (-1, 0, -1) \cdot (1, 2, -1) = 0$, por lo que s es paralela al plano. La respuesta, en forma general, es

$$\boxed{\pi : x + z - 2 = 0.}$$

Problema A.3 · Función racional

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 3x + 2}.$$

a) Dominio y asíntotas. Para que una fracción esté definida, su denominador debe ser distinto de cero. Factorizamos:

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2).$$

El denominador se anula en $x = 1$ y $x = 2$; en cualquier otro real no se anula. Por tanto,

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}.$$

Las posibles asíntotas verticales están en los puntos excluidos. Como el numerador no se anula allí, la fracción diverge. Los signos laterales son:

Límite	Signo del denominador	Resultado
$x \rightarrow 1^-$	$(x - 1)(x - 2) > 0$	$f(x) \rightarrow +\infty$
$x \rightarrow 1^+$	$(x - 1)(x - 2) < 0$	$f(x) \rightarrow -\infty$
$x \rightarrow 2^-$	$(x - 1)(x - 2) < 0$	$f(x) \rightarrow -\infty$
$x \rightarrow 2^+$	$(x - 1)(x - 2) > 0$	$f(x) \rightarrow +\infty$

Así, $x = 1$ y $x = 2$ son asíntotas verticales.

Para $x \rightarrow \pm\infty$, dividimos numerador y denominador por x^2 :

$$f(x) = \frac{1/x}{1 - 3/x + 2/x^2} \rightarrow 0.$$

La asíntota horizontal es $y = 0$. Comprobamos también si existe una oblicua $y = mx + n$:

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = 0.$$

Una recta oblicua requiere $m \neq 0$; aquí $m = 0$ y el límite de $f(x)$ ya da la horizontal $y = 0$. **No hay asíntota oblicua.**

b) Crecimiento y decrecimiento

Usamos la regla del cociente, $(u/v)' = (u'v - uv')/v^2$, con $u = x$, $u' = 1$, $v = x^2 - 3x + 2$, $v' = 2x - 3$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^2 - 3x + 2) - x(2x - 3)}{(x^2 - 3x + 2)^2} \\ &= \frac{2 - x^2}{(x^2 - 3x + 2)^2}. \end{aligned}$$

En el dominio, el denominador de f' es positivo. Por eso el signo depende de $2 - x^2$. Igualamos el numerador a cero:

$$2 - x^2 = 0 \implies x = \pm\sqrt{2}.$$

Junto a estos puntos críticos también marcamos las discontinuidades $x = 1, 2$, que separan el dominio:

Intervalo o punto	Prueba / estado	Signo de f'	Comportamiento
$(-\infty, -\sqrt{2})$	$x = -2 : 2 - (-2)^2 = -2 -$		Decrece
$x = -\sqrt{2}$	$f' = 0$; cambia de $-$ a $+$	0	Mínimo local
$(-\sqrt{2}, 1)$	$x = 0 : 2 - 0 = 2$	+	Crece
$x = 1$	No pertenece al dominio	—	No es extremo; hay discontinuidad
$(1, \sqrt{2})$	$x = \frac{4}{3} : 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}$	+	Crece
$x = \sqrt{2}$	$f' = 0$; cambia de $+$ a $-$	0	Máximo local
$(\sqrt{2}, 2)$	$x = \frac{3}{2} : 2 - \frac{9}{4} = -\frac{1}{4}$	-	Decrece
$x = 2$	No pertenece al dominio	—	No es extremo; hay discontinuidad
$(2, +\infty)$	$x = 3 : 2 - 9 = -7$	-	Decrece

Los valores de los extremos se obtienen sustituyendo en (f):

$$f(-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 3 \text{ (mínimo local)}, \quad f(\sqrt{2}) = -3 - 2\sqrt{2} \text{ (máximo local en la rama (1, 2))}.$$

En $x = 1$ y $x = 2$ la función no está definida; por ello no son máximos ni mínimos, aunque la función sí tenga intervalos crecientes o decrecientes a sus lados.

c) Integral indefinida. Factorizamos el denominador y buscamos constantes A, B :

$$\frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}.$$

Multiplicando por $(x-1)(x-2)$:

$$x = A(x-2) + B(x-1) = (A+B)x - (2A+B).$$

Igualamos coeficientes: $A+B=1$, $2A+B=0$. De aquí $A=-1$, $B=2$. Integramos término a término:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \left(-\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} \right) dx \\ &= -\ln|x-1| + 2\ln|x-2| + C. \end{aligned}$$

La constante C es arbitraria (puede elegirse por separado en cada intervalo del dominio). No hay límites de integración en este apartado.

Opción B

Problema B.1 · Rango e inversa de una matriz

$$A(m) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

a) **Rango según m .** Para una matriz cuadrada de orden 3, si el determinante no es cero, su rango es 3. Desarrollamos por la segunda fila:

$$\det A(m) = m \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & m^2 - 1 \end{vmatrix} = m(-(m^2 - 1) - 2) = -m(m^2 + 1).$$

Como $m^2 + 1 > 0$ para todo $m \in \mathbb{R}$, el determinante solo se anula cuando $m = 0$.

Si $m \neq 0$, $\det A(m) \neq 0$, luego $\text{rg } A(m) = 3$.

Si $m = 0$, la segunda fila es nula y el determinante es cero, así que el rango es menor que 3. El menor de orden 2 formado por las filas 1 y 3 y las columnas 1 y 2 es

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Por tanto, $\text{rg } A(0) \geq 2$, y al combinarlo con el límite superior obtenemos $\text{rg } A(0) = 2$. En resumen:

$$\text{rg } A(m) = \begin{cases} 3, & m \neq 0, \\ 2, & m = 0. \end{cases}$$

b) **Invertibilidad para $m = 1$.** Sustituimos $m = 1$:

$$A(1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \det A(1) = -1(1 + 1) = -2 \neq 0.$$

Una matriz cuadrada es invertible exactamente cuando su determinante no es cero; por eso $A(1)$ tiene inversa.

c) **Cálculo de la inversa y comprobación.** Para hallar la inversa usamos Gauss-Jordan: partimos de $[A(1) \mid I]$, aplicamos operaciones elementales por filas hasta que el bloque izquierdo sea la identidad y leemos la inversa en el bloque derecho. Cada operación se muestra por separado.

Primero cambiamos el signo de la fila 1, $F_1 \leftarrow -F_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \leftarrow -F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Eliminamos el 2 situado bajo el primer pivote, $F_3 \leftarrow F_3 - 2F_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Anulamos el 1 de la segunda columna en la fila 3 con $F_3 \leftarrow F_3 - F_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right).$$

Normalizamos el pivote 2 de la fila 3

Aplicamos $F_3 \leftarrow \frac{1}{2}F_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \leftarrow \frac{1}{2}F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Paso final: anulamos el término sobre el tercer pivote

Usamos $F_1 \leftarrow F_1 + F_3$ para anular el -1 :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftarrow F_1 + F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Así,

$$A(1)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

La regla de la multiplicación matricial es que cada entrada se obtiene con un producto escalar entre una fila y una columna. Para $A(1)A(1)^{-1}$, calculamos las tres filas por separado:

$$F_1 = ((-1)0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1, (-1)(-\frac{1}{2}) + 0 \cdot 1 + 1(-\frac{1}{2}), (-1)(\frac{1}{2}) + 0 \cdot 0 + 1(\frac{1}{2})) = (1, 0, 0),$$

$$F_2 = (0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1, 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0) = (0, 1, 0),$$

$$F_3 = (2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1, 2(-\frac{1}{2}) + 1 \cdot 1 + 0(-\frac{1}{2}), 2(\frac{1}{2}) + 1 \cdot 0 + 0(\frac{1}{2})) = (0, 0, 1).$$

Juntando esas filas,

$$A(1)A(1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Verificación de $A(1)^{-1}A(1)$

Repetimos el cálculo en el orden contrario, ahora multiplicando las filas de $A(1)^{-1}$ por las columnas de $A(1)$:

$$F_1 = (0(-1) - \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 2, 0 \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1, 0 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0) = (1, 0, 0),$$

$$F_2 = (0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2, 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0) = (0, 1, 0),$$

$$F_3 = (1(-1) - \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 2, 1 \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1, 1 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0) = (0, 0, 1).$$

Por tanto,

$$A(1)^{-1}A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Las dos multiplicaciones dan la identidad, así que la inversa queda verificada por ambos lados.

Problema B.2 · Rectas, intersección y planos

La letra del enunciado es λ . Escribimos r en forma paramétrica, con cada coordenada expresada en función de ese parámetro:

$$r : \begin{cases} x = \lambda, \\ y = 1 - \lambda, \lambda \in \mathbb{R}. \\ z = 3, \end{cases}$$

Para s , tomamos μ como el valor común de las expresiones del enunciado y obtenemos directamente su forma paramétrica:

$$s : \begin{cases} x = 1 + \mu, \\ y = \mu, \mu \in \mathbb{R}. \\ z = 3 + \mu, \end{cases}$$

a) Vectores directores. De las expresiones paramétricas se leen

$$\vec{d}_r = (1, -1, 0), \vec{d}_s = (1, 1, 1).$$

b) Plano perpendicular a r por $(0, 1, 3)$. Un plano perpendicular a una recta tiene por vector normal un vector director de esa recta. Usamos $\vec{n} = (1, -1, 0)$. La forma general es $n_x x + n_y y + n_z z + D = 0$; al sustituir el punto:

$$1x - 1y + 0z + D = 0, 0 - 1 + 0 + D = 0 \implies D = 1.$$

Por tanto, el plano en forma general es

$$\pi_1 : x - y + 1 = 0.$$

c) Punto de intersección y plano que contiene ambas rectas. Igualamos las parametrizaciones. En las coordenadas (x, y, z) :

$$\begin{cases} \lambda = 1 + \mu, \\ 1 - \lambda = \mu, \\ 3 = 3 + \mu. \end{cases}$$

La tercera ecuación da $\mu = 0$; la primera, entonces, da $\lambda = 1$. La segunda también se cumple: $1 - 1 = 0$. Sustituimos, por ejemplo, en r :

$$P = r(1) = (1, 0, 3).$$

Las dos direcciones del plano buscado son $\vec{d}_r$ y $\vec{d}_s$. Su producto vectorial es un vector normal:

$$\vec{n} = \vec{d}_r \times \vec{d}_s = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -1, 2).$$

Aplicamos la ecuación de plano por el punto $P = (1, 0, 3)$:

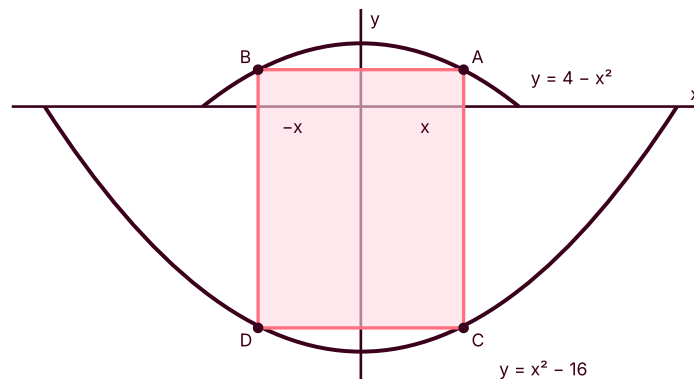
$$-(x - 1) - y + 2(z - 3) = 0 \implies -x - y + 2z - 5 = 0.$$

Multiplicando por -1 , una forma equivalente y más sencilla es

$$\pi_2 : x + y - 2z + 5 = 0.$$

Problema B.3 · Área máxima de un rectángulo

Sea $x > 0$ la abscisa del vértice derecho superior e inferior; los vértices izquierdos tienen abscisa $-x$. Las curvas son $y = 4 - x^2$ (parte superior) y $y = x^2 - 16$ (parte inferior).



a) Función de área. Los puntos superiores deben pertenecer a $y = 4 - x^2$, cuyo arco solo está definido para $-2 \leq x \leq 2$. Como x es positivo, $0 < x \leq 2$. La parábola inferior admite este mismo intervalo. Las coordenadas de los cuatro vértices son

Vértice Coordenadas

A $(x, 4 - x^2)$

B $(-x, 4 - x^2)$

C $(x, x^2 - 16)$

D $(-x, x^2 - 16)$

La base es la distancia entre abscisas x y $-x$: $x - (-x) = 2x$. La altura es la diferencia entre las ordenadas superior e inferior:

$$(4 - x^2) - (x^2 - 16) = 20 - 2x^2.$$

Usando **área = base × altura**:

$$S(x) = 2x(20 - 2x^2) = 40x - 4x^3, \quad 0 < x \leq 2.$$

b) Valor de x que maximiza el área

Derivamos la función del área y buscamos sus puntos críticos dentro del dominio:

$$S'(x) = 40 - 12x^2 = 4(10 - 3x^2), \quad S'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{10}{3}}.$$

Como $x > 0$, el único punto crítico posible es $x_0 = \sqrt{\frac{10}{3}}$. Además $x_0 < 2$, pues $\frac{10}{3} < 4$, así que está permitido. Comprobamos el signo de la derivada a ambos lados:

Intervalo o punto	Prueba / cálculo	Signo de $S'(x)$	Comportamiento
$(0, x_0)$	$x = 1 : 40 - 12 = 28 > 0$	+	Crece
$x = x_0$	$S'(x_0) = 0$; cambia de + a -	0	Máximo
$(x_0, 2]$	$x = \frac{19}{10} : 40 - 12 \cdot \frac{361}{100} = -\frac{83}{25} < 0$	-	Decrece

Así, S crece hasta x_0 y decrece después. Para confirmar el máximo absoluto en el intervalo permitido, comparamos con el extremo $x = 2$:

$$S(2) = 40 \cdot 2 - 4 \cdot 2^3 = 48, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} S(x) = 0.$$

El punto interior donde cambia de crecimiento a decrecimiento es, por tanto, el máximo absoluto y

$$x = \sqrt{\frac{10}{3}} = \frac{\sqrt{30}}{3}.$$

c) Área máxima

Sustituimos el valor exacto de x en la función de área:

$$\begin{aligned} S_{\max} &= 40\sqrt{\frac{10}{3}} - 4\left(\sqrt{\frac{10}{3}}\right)^3 \\ &= 40\sqrt{\frac{10}{3}} - \frac{40}{3}\sqrt{\frac{10}{3}} \\ &= \frac{80}{3}\sqrt{\frac{10}{3}} = \frac{80\sqrt{30}}{9} \\ &\approx 48.6864 \text{ unidades}^2. \end{aligned}$$

El área máxima exacta es $\frac{80\sqrt{30}}{9} \text{ unidades}^2$ (aproximadamente **48.6864 unidades²**).