

CATALUÑA · PAU 2011 · EXTRAORDINARIA

Matemáticas II

6 ejercicios

Instrucciones del examen

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué es lo que quiere hacer y por qué. Cada cuestión vale 2 puntos. Puede utilizar calculadora, pero no se pueden utilizar calculadoras u otros aparatos que lleven información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

Ejercicio 1

2 puntos

Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} k+1 & 1 & 1 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 0 & k-2 & -k \end{pmatrix}$

a) 1 punto

Calcule los valores del parámetro k para los cuales la matriz M no es invertible.

b) 1 punto

Para $k = 0$, calcule M^{-1} .

Ejercicio 2

2 puntos

Dada la recta $\begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases}$, calcule la ecuación general (es decir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del plano perpendicular a la recta que pasa por el punto $P = (1, 0, -1)$.

Ejercicio 3

2 puntos

Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$:

a) 0,5 puntos

Determine la relación que deben cumplir los parámetros a , b y c para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = -1$.

b) 0,5 puntos

Calcule el valor del parámetro a para que haya un punto de inflexión de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

c) 0,5 puntos

Determine la relación entre los parámetros a , b y c sabiendo que la gráfica de $f(x)$ corta el eje OX en el punto de abscisa $x = -2$.

d) 0,5 puntos

Calcule el valor de los parámetros a , b y c para que se cumplan las tres propiedades anteriores a la vez.

Ejercicio 4

2 puntos

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. NOTA: Trabaje con radicales; no utilice la representación decimal de los elementos de la matriz.

a) 1 punto

Calcule A^2 y A^3 .

b) 1 punto

Deduzca el valor de A^{101} .

Ejercicio 5

2 puntos

Considere la recta $r : \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = z - a$ y el plano $\pi : 2x + y - 5z = 5$.

a) 1 punto

Estudie la posición relativa de la recta r y el plano π en función del parámetro a .

b) 1 punto

Cuando $a = 3$, calcule la distancia de la recta r al plano π .

Ejercicio 6

2 puntos

Sea $f(a) = \int_0^{1/a} (a^2 + x^2) dx$ para $a > 0$.

a) 1 punto

Compruebe que $f(a) = \frac{1}{3a^3} + a$.

b) 1 punto

Calcule el valor del parámetro a para que la función $f(a)$ tenga un mínimo relativo.