

Modelo 5 de 2020

Resolución completa de los ocho ejercicios, con desarrollo matemático y resultados exactos.

Ejercicio 1

La pendiente de la tangente en x es $f'(x) = (4-x)e^{x-4}$. Para maximizarla buscamos los ceros de su derivada: $f''(x) = (3-x)e^{x-4}$, positiva si $x < 3$ y negativa si $x > 3$. Por tanto, la pendiente tiene máximo en $x = 3$. El punto de la gráfica es $\boxed{(3, 2/e)}$.

Ejercicio 2

Con $x = 1 + e^t$, se tiene $dx = e^t dt = (x-1)dt$ y

$$\int \frac{dt}{1+e^t} = \int \frac{dx}{x(x-1)} = \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| + C = t - \ln(1+e^t) + C.$$

Para $g(x) = \int_0^x f(t)dt$, el teorema fundamental del cálculo da $g'(0) = f(0) = 1/2$. Como $g(0) = 0$, el límite es la derivada en cero:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = \frac{1}{2}.$$

Ejercicio 3

El determinante de la matriz de coeficientes es

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -m & 1 \\ 5 & 2 & m \\ 0 & m & m-3 \end{pmatrix} = m(m^2 - 2m + 11).$$

Como $m^2 - 2m + 11 = (m-1)^2 + 10 > 0$, solo se anula en $m = 0$. Para $m \neq 0$, el sistema es SCD. Para $m = 0$, las ecuaciones primera y tercera son $z = 1$ y $-3z = -3$, y la segunda queda $5x + 2y = 0$; los rangos coinciden y valen $2 < 3$, por lo que es SCI. En este caso, tomando $y = t$, se tiene $(x, y, z) = (-2t/5, t, 1)$. Si $y = 5$, una solución es $\boxed{(-2, 5, 1)}$.

Ejercicio 4

Un punto de r es $Q = (-1, 0, 2)$ y su director es $\vec{v} = (-1, 1, 0)$. Con $A - Q = (2, 0, -1)$,

$$d(A, r) = \frac{|(A-Q) \times \vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \boxed{\sqrt{3}}.$$

El área del triángulo ABO es la mitad del área del paralelogramo generado por $A = (1, 0, 1)$ y $B = (-1, 0, 2)$:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}|A \times B| = \boxed{\frac{3}{2}}.$$

Ejercicio 5

La normal dada tiene pendiente $1/2$, así que la tangente en $x = 1$ tiene pendiente -2 . Además, la normal pasa por $(1, f(1))$; al sustituir $x = 1$ en $y = x/2 + 3/2$, obtenemos $f(1) = 2$. Las condiciones son

$$a + b + c = 3, \quad 3a + 2b + c = -2, \quad 12a + 4b + c = 0,$$

donde la última expresa que $x = 2$ es crítico. Resolviendo, $a = 12/5, b = -49/5, c = 52/5$.

Ejercicio 6

Con $u = \ln x$, $dx = e^u du$, y la integral pasa a $\int e^u \cos u du$. Integrando por partes dos veces (o derivando el resultado para comprobarlo),

$$\int \cos(\ln x) dx = \frac{x}{2} (\sin(\ln x) + \cos(\ln x)) + C, \quad x > 0.$$

Ejercicio 7

La ecuación $AX + B = C$ equivale a $AX = C - B = (-2, 2, -2)^t$. El determinante de A es $-(m - 5)(2m + 1)$. Por tanto, la solución es única exactamente cuando $m \neq 5, -1/2$. Para $m = 0$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} -14/5 \\ -4/5 \\ -6/5 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 8

Un plano perpendicular a π y paralelo a r debe tener un normal perpendicular al normal $(2, -1, 1)$ de π y al director $(1, -2, -1)$ de r . El producto vectorial de estos vectores es proporcional a $(1, 1, -1)$. Al pasar por $P = (1, 1, 2)$, el plano es

$$x + y - z = 0.$$

Para reflejar P respecto de r , tomamos $Q = (3, 1, -2)$ y $\vec{v} = (1, -2, -1)$. El parámetro del pie perpendicular es

$$t = \frac{(P - Q) \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} = \frac{(-2, 0, 4) \cdot (1, -2, -1)}{6} = -1.$$

Así, el pie es $H = (2, 3, -1)$ y el simétrico $P' = 2H - P = (3, 5, -4)$.