

El examen propone dos opciones y se debe elegir una. Para repasar todos los contenidos, resolvemos los cuatro ejercicios de ambas opciones.

Opción A - Ejercicio 1

Sea r el radio del cilindro y h su altura. La capacidad fija exige

$$\pi r^2 h = 20\pi \implies h = \frac{20}{r^2}, \quad r > 0.$$

Las dos tapas tienen en total un área $2\pi r^2$ y cuestan 10 euros por metro cuadrado; la superficie lateral tiene área $2\pi r h$ y cuesta 8 euros por metro cuadrado. Así, el coste total es

$$C(r) = 10(2\pi r^2) + 8(2\pi r h) = 20\pi r^2 + \frac{320\pi}{r}.$$

Buscamos su mínimo en $r > 0$:

$$C'(r) = 40\pi r - \frac{320\pi}{r^2} = 0 \implies r^3 = 8 \implies r = 2 \text{ m.}$$

Además, $C''(r) = 40\pi + 640\pi/r^3 > 0$, por lo que este punto crítico da el mínimo. Con la restricción de volumen, $h = 20/2^2 = 5$ m. Por tanto, el depósito de menor coste tiene

$$r = 2 \text{ m,} \quad h = 5 \text{ m.}$$

Opción A - Ejercicio 2

$$I = \int_0^8 \frac{1}{2 + \sqrt{x+1}} dx.$$

a) Aplicamos el cambio sugerido $t = 2 + \sqrt{x+1}$. Entonces $\sqrt{x+1} = t - 2$, $x = (t-2)^2 - 1$ y $dx = 2(t-2) dt$. Los límites cambian: si $x = 0$, $t = 3$; si $x = 8$, $t = 5$. Por tanto,

$$I = \int_3^5 \frac{2(t-2)}{t} dt.$$

b) Simplificamos el integrando y calculamos la integral definida:

$$I = 2 \int_3^5 \left(1 - \frac{2}{t}\right) dt = [2t - 4 \ln t]_3^5 = 4 - 4 \ln \left(\frac{5}{3}\right).$$

Así, el valor exacto es

$$I = 4 - 4 \ln \left(\frac{5}{3}\right).$$

Opción A - Ejercicio 3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^T = A.$$

a) Como A es simétrica, $AA^T = A^2$. Multiplicamos:

$$AA^T = A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad 2A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Al restar entrada a entrada obtenemos

$$AA^T - 2A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I,$$

como se quería comprobar.

b) De $A^2 - 2A = I$ se deduce $A(A - 2I) = I$. Por tanto, $A^{-1} = A - 2I$, y

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

c) La ecuación $XA + I = 3A$ equivale a $XA = 3A - I$. Como A es invertible, multiplicamos por A^{-1} a la derecha:

$$X = (3A - I)A^{-1} = 3I - A^{-1} = 5I - A.$$

Así, la matriz pedida es

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Opción A - Ejercicio 4

a) El plano de simetría debe pasar por el punto medio de AB y ser perpendicular al segmento. Calculamos

$$M = \frac{A+B}{2} = (0, -1, 0), \quad \overrightarrow{AB} = B - A = (1 - (-1), 0 - (-2), 1 - (-1)) = (2, 2, 2).$$

El vector $\overrightarrow{AB}$ es, por tanto, normal al plano. La ecuación del plano que pasa por M es

$$2(x - 0) + 2(y + 1) + 2(z - 0) = 0,$$

o, simplificando,

$$x + y + z + 1 = 0.$$

b) La recta que pasa por A y B tiene vector director $\vec{d} = \overrightarrow{AB} = (2, 2, 2)$. Tomamos $\overrightarrow{AP} = P - A = (-1 - (-1), 0 - (-2), 1 - (-1)) = (0, 2, 2)$. La distancia de P a la recta es

$$d(P, r) = \frac{\|\overrightarrow{AP} \times \vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}.$$

Calculamos el producto vectorial y los módulos:

$$\overrightarrow{AP} \times \vec{d} = (0, 4, -4), \quad \|\overrightarrow{AP} \times \vec{d}\| = 4\sqrt{2}, \quad \|\vec{d}\| = 2\sqrt{3}.$$

Por tanto,

$$d(P, r) = \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

Opción B - Ejercicio 1

La función polinómica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ está definida para todo $x \in \mathbb{R}$. El extremo relativo en $(0, 1)$ impone $f(0) = 1$ y $f'(0) = 0$. El punto de inflexión $(1, -1)$ exige $f(1) = -1$ y $f''(1) = 0$. Derivamos:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c, \quad f''(x) = 6ax + 2b.$$

Las cuatro condiciones se traducen en

$$d = 1, \quad c = 0, \quad a + b + 1 = -1, \quad 6a + 2b = 0.$$

De las dos últimas, $a + b = -2$ y $b = -3a$, por lo que $a = 1$ y $b = -3$. Comprobamos que $f''(0) = -6 < 0$, así que el punto $(0, 1)$ es efectivamente un máximo relativo; además, $f'''(x) = 6$ confirma el cambio de concavidad en $x = 1$. La función es

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1.$$

Opción B - Ejercicio 2

La curva $f(x) = \sqrt{2x - 2}$ corta al eje de abscisas cuando $2x - 2 = 0$, es decir, en $(1, 0)$. La recta $y = x - 5$ corta ese eje en $(5, 0)$. Para hallar el corte entre la curva y la recta resolvemos

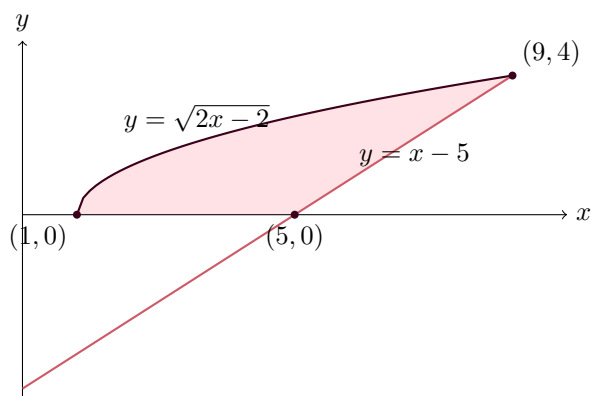
$$\sqrt{2x - 2} = x - 5.$$

El segundo miembro debe ser no negativo, así que $x \geq 5$. Al elevar al cuadrado,

$$2x - 2 = (x - 5)^2 \implies (x - 3)(x - 9) = 0.$$

Solo $x = 9$ cumple $x \geq 5$, y el punto de intersección es $(9, 4)$. En $(5, 9)$ la curva queda por encima de la recta; el recinto también incluye la parte entre $x = 1$ y $x = 5$, donde la curva está sobre el eje OX .

a) El esbozo recoge los tres puntos de corte y las dos partes del recinto:



b) Como cambia la frontera inferior en $x = 5$, expresamos el área como suma de dos integrales. En el primer intervalo se integra la curva menos el eje OX ; en el segundo, la curva menos la recta:

$$\mathcal{A} = \int_1^5 \sqrt{2x-2} \, dx + \int_5^9 (\sqrt{2x-2} - (x-5)) \, dx.$$

c) Una primitiva de $\sqrt{2x-2}$ es $\frac{1}{3}(2x-2)^{3/2}$. Evaluamos cada parte:

$$\begin{aligned} \int_1^5 \sqrt{2x-2} \, dx &= \left[\frac{1}{3}(2x-2)^{3/2} \right]_1^5 = \frac{16\sqrt{2}}{3}, \\ \int_5^9 (\sqrt{2x-2} - (x-5)) \, dx &= \left[\frac{1}{3}(2x-2)^{3/2} - \frac{x^2}{2} + 5x \right]_5^9 \\ &= \frac{64}{3} - \frac{16\sqrt{2}}{3} - 8. \end{aligned}$$

Al sumar, los términos con $\sqrt{2}$ se cancelan y el área total es

$$\mathcal{A} = \frac{40}{3} \text{ unidades}^2.$$

Opción B - Ejercicio 3

a) Para una matriz 3×3 , al multiplicar todas sus filas por 2, el determinante queda multiplicado por 2^3 . Por tanto,

$$\det(2A) = 8 \det(A) = 8 \implies \boxed{\det(A) = 1}.$$

b) Multiplicar una fila por 3 multiplica el determinante por 3; multiplicar otra fila por -1 lo multiplica por -1 . Así, el factor total es -3 y

$$\boxed{\det(B) = -3 \det(A) = -3}.$$

c) En este apartado,

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 2 & 2 \\ x & -x+2 & 1 \end{pmatrix}.$$

La condición $\det(2A) = 8$ equivale de nuevo a $\det(A) = 1$. Calculamos el determinante desarrollando por la primera fila:

$$\begin{aligned} \det A &= x(2 - 2(-x+2)) - ((x+1) - 2x) \\ &\quad + (x+1)(-x+2) - 2x \\ &= x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2. \end{aligned}$$

Igualemos a 1 y resolvemos:

$$(x-1)^2 = 1 \implies x-1 = \pm 1 \implies \boxed{x=0 \text{ o } x=2.}$$

Opción B - Ejercicio 4

a) Formamos los vectores desde A hasta los otros tres vértices:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0-1, -2-1, 2-1) = (-1, -3, 1),$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (-1-1, 0-1, 2-1) = (-2, -1, 1), \quad \overrightarrow{AD} = D - A = (2-1, -1-1, -2-1) = (1, -2, -3).$$

El volumen de un tetraedro es la sexta parte del valor absoluto del determinante de los tres vectores que concurren en un vértice:

$$V = \frac{1}{6} \left| \det \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \right|.$$

El determinante vale 15, así que

$$\boxed{V = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}.}$$

b) Un vector normal al plano ABC es el producto vectorial de dos vectores del plano:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-2, -1, -5).$$

Usando el punto $A = (1, 1, 1)$, la ecuación general del plano es

$$-2(x-1) - (y-1) - 5(z-1) = 0 \implies 2x + y + 5z - 8 = 0.$$

La recta perpendicular a ese plano tiene como vector director el normal $\vec{n}$ (podemos tomar también su opuesto). Debe pasar por $D = (2, -1, -2)$, por lo que, en forma paramétrica,

$$\ell : \begin{cases} x = 2 + 2t, \\ y = -1 + t, \\ z = -2 + 5t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$