

Modelo UA4 de 2014

Soluciones desarrolladas · PAU Andalucía

Opción A · Ejercicio 1

El dominio es $x > 0$. La pendiente de la tangente es $f'(x) = 1/x - 1/(2x^2)$. Para localizar su máximo estudiamos su derivada:

$$f''(x) = \frac{1-x}{x^3}.$$

La pendiente crece en $(0, 1)$ y decrece en $(1, +\infty)$, por lo que es máxima en $x = 1$. Allí $f(1) = 1/2$, así que el punto es $(1, 1/2)$. La normal tiene pendiente $-1/f'(1) = -2$ y pasa por $(1, 1/2)$:

$$y - \frac{1}{2} = -2(x - 1).$$

Opción A · Ejercicio 2

Una primitiva es $-(4-x)\ln(4-x) + (4-x)$. Evaluando en los extremos,

$$\int_{-1}^1 \ln(4-x) dx = \boxed{5\ln 5 - 3\ln 3 - 2}.$$

Opción A · Ejercicio 3

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m+1 & 2 \\ m & 1 & 1 \\ 1-m & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m+1 & 2 & -1 \\ m & 1 & 1 & m \\ 1-m & 2 & 1 & -m-1 \end{array} \right), \quad \det A = -(m-2)(2m-1).$$

Para $m \neq 2, 1/2$ el determinante es no nulo y el sistema es SCD. Si $m = 1/2$, el menor formado por las dos primeras filas y las dos primeras columnas vale $1/4 \neq 0$, así que $\text{rg } A = 2$. La combinación $2R_1 - 5R_2 + R_3$ anula los coeficientes pero da $-6 \neq 0$ en los términos independientes; entonces $\text{rg } A^* = 3$ y el sistema es SI. Si $m = 2$, el menor correspondiente vale $-5 \neq 0$, luego $\text{rg } A = 2$. La relación $-R_1 + R_2 + R_3 = 0$ también se cumple en los términos independientes, así que $\text{rg } A^* = 2 < 3$ y el sistema es SCI. La familia de soluciones es

$$(x, y, z) = \left(\frac{7}{5} - \frac{t}{5}, -\frac{4}{5} - \frac{3t}{5}, t \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para $z = 2, t = 2$, y se obtiene $(x, y, z) = (1, -2, 2)$.

Opción A · Ejercicio 4

Sean $u = (1, -1, 0)$, $v = (0, 1, 2)$ y $w = (1+\alpha, 2\alpha, 2-3\alpha)$. **a)** Los vectores son coplanarios cuando el determinante es cero:

$$\det(u, v, w) = -9\alpha = 0 \implies \boxed{\alpha = 0}.$$

b) Para que w sea perpendicular a ambos, imponemos $u \cdot w = 1 - \alpha = 0$ y $v \cdot w = 4 - 4\alpha = 0$. En ambos casos se obtiene $\boxed{\alpha = 1}$. **c)** El volumen del tetraedro es $|\det(u, v, w)|/6 = 1/6$. Por tanto $9|\alpha| = 1$, es decir, $\boxed{\alpha = \pm 1/9}$.

Opción B · Ejercicio 1

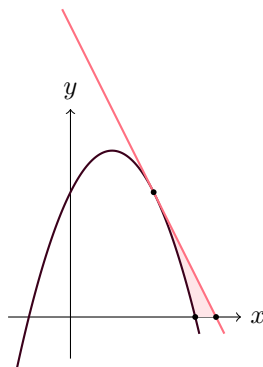
La condición de extremo en $x = -1$ da $f'(-1) = 3 - 2b + c = 0$. El límite finito en $x = 1$ exige $f(1) = 0$, y su valor es entonces $f'(1) = 3 + 2b + c = 4$. Restando las ecuaciones se obtiene $4b = 4$, así que $b = 1$ y $c = -1$. De $f(1) = 0$ resulta $d = -1$. Además $f''(-1) = -4 < 0$, como requiere el máximo. Por tanto,

$$\boxed{b = 1, \quad c = -1, \quad d = -1}.$$

Opción B · Ejercicio 2

a) En $x = 2$, $f(2) = 3$ y $f'(2) = -2$. La tangente es $y - 3 = -2(x - 2)$, es decir, $y = -2x + 7$.

b) Los cortes de la parábola con el eje X son $x = -1, 3$; la recta corta ese eje en $x = 7/2$. La parábola y la recta son tangentes en $(2, 3)$. El recinto limitado por las tres curvas es el pequeño recinto de vértices $(2, 3)$, $(3, 0)$ y $(7/2, 0)$; el esbozo muestra su frontera:



c) En $[2, 3]$ la recta queda por encima de la parábola; de 3 a $7/2$ queda entre la recta y el eje. Por tanto,

$$A = \int_2^3 ((-2x + 7) - (-x^2 + 2x + 3)) dx + \int_3^{7/2} (-2x + 7) dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{7}{12}}.$$

Opción B · Ejercicio 3

a) Calculamos A^2 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{(1+m)^2 + 1}{2} & 2 \\ (1-m)^2 + 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Al comparar con $2A + I$, ambas entradas diagonales exigen $m^2 = 1$, y las no diagonales ya coinciden. Así, $\boxed{m = \pm 1}$.

b) Para $m = 1$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\det A = -1$, por lo que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

De $AX - B = AB$ despejamos $X = A^{-1}(AB + B)$. Calculando primero $AB + B$ y luego multiplicando por A^{-1} ,

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}.$$

Opción B · Ejercicio 4

La recta tiene punto $R = (-1, 2, 1)$ y dirección $d = (2, 1, 3)$. El plano perpendicular a r tiene normal d y pasa por $A = (8, -1, 3)$:

$$2(x - 8) + (y + 1) + 3(z - 3) = 0 \implies \boxed{2x + y + 3z - 24 = 0}.$$

Para reflejar A respecto de r , primero hallamos su proyección $H = R + td$. La perpendicularidad exige $(A - H) \cdot d = 0$, luego

$$t = \frac{(A - R) \cdot d}{|d|^2} = \frac{21}{14} = \frac{3}{2}, \quad H = \left(2, \frac{7}{2}, \frac{11}{2}\right).$$

El simétrico es $A' = 2H - A$, por tanto $\boxed{A' = (-4, 8, 8)}$.