

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)

Una pizzería ofrece tres tipos de pizza: margarita, vegetariana y pepperoni. A lo largo de los años, utilizando su aplicación para teléfonos inteligentes, el restaurante ha recopilado datos sobre las preferencias de los clientes, calculando que el 40% de sus clientes piden pizza margarita, el 25% elige la pizza vegetariana y el resto prefiere la pizza pepperoni.

1.1 **(0.25 puntos)** Si se elige un cliente al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya pedido una pizza pepperoni?

1.2 **(0.75 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que dos clientes elegidos al azar hayan pedido distintos tipos de pizza?

Para mejorar su servicio y agilizar los tiempos de preparación, la pizzería decide considerar un grupo típico de 10 clientes con el objetivo de decidir cuántas pizzas margarita preparar con antelación y evitar retrasos durante las horas con más demanda, minimizando el desperdicio.

1.3 **(0.75 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 4 de los 10 clientes pidan pizzas margarita?

1.4 **(0.75 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de los 10 clientes del grupo pida una pizza margarita?

Solución:

Utilizamos los siguientes sucesos:

PM = el cliente pide pizza margarita

PV = el cliente pide pizza vegetariana

PP = el cliente pide pizza pepperoni

De los datos del problema:

“el 40% de sus clientes piden pizza margarita” $\rightarrow P(PM) = 0.40$

“el 25% de sus clientes piden pizza vegetariana” $\rightarrow P(PV) = 0.25$

“el resto piden pizza pepperoni” $\rightarrow$ el resto será: $100 - 40 - 25 = 35$, luego $P(PP) = 0.35$

1.1) Si se elige un cliente al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya pedido una pizza pepperoni?

$$P(PP) = 0.35$$

La probabilidad pedida es 0.35.

1.2) ¿Cuál es la probabilidad de que dos clientes elegidos al azar hayan pedido distintos tipos de pizza?

Sea el suceso $A =$ “dos clientes elegidos al azar han pedido distintos tipos de pizza”

Consideremos su suceso complementario, $\bar{A} =$ “dos clientes elegidos al azar han pedido el mismo tipo de pizza”

$$P(\bar{A}) = P(PM)P(PM) + P(PV)P(PV) + P(PP)P(PP) = 0.4 \cdot 0.4 + 0.25 \cdot 0.25 + 0.35 \cdot 0.35 = 0.345$$

$$\text{Finalmente } P(A) = 1 - 0.345 = 0.655$$

La probabilidad pedida es 0.655.

La pizzería decide considerar un grupo típico de 10 clientes con el objetivo de decidir cuántas pizzas margarita preparar con antelación.

Para responder las siguientes cuestiones consideramos la variable:

X = número de clientes, de un grupo de 10, que piden pizza margarita $\rightarrow X = B(10, 0.4)$

1.3) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 4 de los 10 clientes pidan pizzas margarita?

Debemos calcular $P(X = 4) = \binom{10}{4} 0.4^4 \cdot 0.6^6 = 0.2508$

La probabilidad pedida es 0.2508.

1.4) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de los 10 clientes del grupo pida una pizza margarita?

Debemos calcular $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} 0.4^0 \cdot 0.6^{10} = 1 - 0.0060 = 0.9940$

La probabilidad pedida es 0.9940.

Tu Profecia al Rescate

2.1 En un sistema de procesamiento de imágenes se utiliza una matriz para transformar ciertos datos. La matriz depende del parámetro real α y es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{bmatrix}$$

2.1.1 (1.25 puntos) En uno de los procesos, para que el sistema funcione, se necesita que la matriz sea idempotente, es decir que su cuadrado coincida con ella, $A^2 = A$. Obtener los valores de α que permitan funcionar a este proceso.

2.1.2 (1.25 puntos) En otro proceso diferente, se necesita utilizar la matriz inversa de A . Obtener los valores de α para los cuales existe la inversa y calcular esta inversa en función de α .

Solución:

2.1.1) Valores α tales que $A^2 = A$.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + \alpha \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot \alpha + \alpha \cdot \alpha + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + \alpha \cdot 0 + 0 \cdot (1-\alpha) \\ 0 \cdot 1 + \alpha \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot \alpha + \alpha \cdot \alpha + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + \alpha \cdot 0 + 0 \cdot (1-\alpha) \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + (1-\alpha) \cdot 0 & 0 \cdot \alpha + 0 \cdot \alpha + (1-\alpha) \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (1-\alpha)^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \alpha + \alpha^2 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\alpha)^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Para que } A^2 = A, \begin{pmatrix} 1 & \alpha + \alpha^2 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\alpha)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \alpha + \alpha^2 = \alpha \\ \alpha^2 = \alpha \\ (1-\alpha)^2 = 1-\alpha \end{cases}$$

Resolvamos cada una de las tres ecuaciones:

$$\alpha + \alpha^2 = \alpha; \quad \alpha^2 = \alpha - \alpha; \quad \alpha^2 = 0; \quad \alpha = 0$$

$$\alpha^2 = \alpha; \quad \alpha^2 - \alpha = 0; \quad \alpha(\alpha - 1) = 0 \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha - 1 = 0; \quad \alpha = 1 \end{cases}$$

$$(1-\alpha)^2 = 1-\alpha; \quad (1-\alpha)^2 - (1-\alpha) = 0; \quad (1-\alpha)[(1-\alpha) - 1] = 0 \begin{cases} 1-\alpha = 0; \quad \alpha = 1 \\ (1-\alpha) - 1 = 0; \quad -\alpha = 0; \quad \alpha = 0 \end{cases}$$

Se cumplen las tres ecuaciones cuando $\alpha = 0$.

Solución: la matriz A es idempotente cuando $\alpha = 0$.

2.1.2) Valores de α para los que existe A^{-1} .

Existirá A^{-1} cuando $|A| \neq 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{vmatrix} = \alpha(1-\alpha); \quad \alpha(1-\alpha) = 0 \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha - 1 = 0; \quad \alpha = 1 \end{cases}$$

Para que exista A^{-1} debe ser $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 1$.

Calculamos A^{-1} para estos valores de α :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{menores}} \left(\begin{array}{c|c|c} \left| \begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1-\alpha \end{smallmatrix} \right| & \left| \begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1-\alpha \end{smallmatrix} \right| & \left| \begin{smallmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \right| \\ \hline \left| \begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1-\alpha \end{smallmatrix} \right| & \left| \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-\alpha \end{smallmatrix} \right| & \left| \begin{smallmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \right| \\ \hline \left| \begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ \alpha & 0 \end{smallmatrix} \right| & \left| \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \right| & \left| \begin{smallmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \alpha \end{smallmatrix} \right| \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \alpha(1-\alpha) & 0 & 0 \\ \alpha(1-\alpha) & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha(1-\alpha) & 0 & 0 \\ -\alpha(1-\alpha) & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix} \alpha(1-\alpha) & -\alpha(1-\alpha) & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

$$\text{Finalmente, } A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} \alpha(1-\alpha) & -\alpha(1-\alpha) & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \begin{pmatrix} \alpha(1-\alpha) & -\alpha(1-\alpha) & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-\alpha} \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución: } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-\alpha} \end{pmatrix}$$

2.2 Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 0 \\ 2x + ay - 5z = -3 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

donde a es un parámetro real. Se pide:

2.2.1 **(1 punto)** Discutir el sistema en función del parámetro a .

2.2.2 **(0.75 puntos)** Calcular las soluciones del sistema cuando éste sea compatible indeterminado.

2.2.3 **(0.75 puntos)** Calcular las soluciones del sistema para $a = 0$.

Solución:

2.2.1)

La matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & a & -5 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right)$

A es una matriz 3×3 , por tanto el máximo rango de A es 3. A' es una matriz 3×4 , por tanto el máximo rango de A es 3.

Empezamos estudiando el rango de A

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 2 & a & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6a - 6 + 10 + 3a + 15 + 8 = 9a + 27$$

$$9a + 27 = 0; \quad 9a = -27; \quad a = \frac{-27}{9} = -3$$

Si $a \neq -3$

$|A| \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 3$, y como el máximo rango de A' es 3 $\rightarrow \text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 3 = n^\circ$ incógnitas, por lo que el sistema es compatible y determinado.

Si $a = -3$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & -3 & -5 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

Sabemos que $|A| = 0$, estudiemos el rango de A ,
$$\left. \begin{array}{l} |3| = 3 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 2 = 5 \neq 0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{ran}(A) = 2$$

En A' , a partir del menor no nulo de orden 2 anterior formamos el menor de orden 3 añadiéndole la 2ª fila y 4ª columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -27 + 6 + 9 + 12 = 0 \rightarrow \text{ran}(A') = 2$$

Por lo tanto, $\text{ran}(A) = \text{ran}(A') = 2 < 3$ (número de incógnitas), luego el sistema es compatible indeterminado.

Solución, si $a \neq -3$, el sistema es compatible determinado;

si $a = -3$, el sistema es compatible indeterminado;

2.2.2) Soluciones cuando el sistema es compatible indeterminado.

El sistema es compatible indeterminado cuando $a = -3$

El sistema a resolver es el correspondiente a las ecuaciones e incógnitas del menor de orden 2 no nulo calculado en el apartado 2.2.1). Es decir, el formado por la 1ª y 3ª ecuaciones y como incógnitas principales x e y .

$$\begin{cases} 3x - 2y = 3z \\ x + y = 3 - 2z \end{cases} \quad \text{sabemos que} \quad \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

Resolviendo por Cramer:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} 3z & -2 \\ 3-2z & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{3z + 6 - 4z}{5} = \frac{6 - z}{5} \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3z \\ 1 & 3-2z \end{vmatrix}}{5} = \frac{9 - 6z - 3z}{5} = \frac{9 - 9z}{5} \end{aligned} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{6 - \lambda}{5} \\ y = \frac{9 - 9\lambda}{5} \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Si $a = -3$ la solución es:
$$\begin{cases} x = \frac{6 - \lambda}{5} \\ y = \frac{9 - 9\lambda}{5} \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

2.2.3) Solución para $a = 0$.

Si $a = 0$ ($0 \neq -3$) $\rightarrow$ S. C. D.

El sistema a resolver es:
$$\begin{cases} 3x - 2y - 3z = 0 \\ 2x - 5z = -3 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

$$|A| = 9a + 27 \big|_{a=0} = 27$$

Resolviendo por Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -3 & 0 & -5 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{27} = \frac{9 + 30 - 12}{27} = \frac{27}{27} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{27} = \frac{6 + 9 + 12}{27} = \frac{27}{27} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & -5 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{27} = \frac{-18 - 18 - 9 + 45}{27} = \frac{0}{27} = 0$$

Si $a = 0$, la solución es:
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

3.1 Dada la recta $r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$ y la recta $s: \begin{cases} x = -1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$, calcular:

3.1.1 (1 punto) Si existen, las coordenadas del punto de corte de ambas rectas.

3.1.2 (1 punto) La ecuación del plano que contiene a ambas rectas.

3.1.3 (0.5 puntos) La distancia del punto $P = (1, 0, 2)$ a dicho plano.

Solución:

3.1.1) Punto de corte entre r y s .

Iguando el valor de x en las dos ecuaciones: $1 + 2\lambda = -1$; $2\lambda = -1 - 1$; $2\lambda = -2$; $\lambda = -1$

Sustituyendo en la definición de r : $y = 0 - 1$; $z = 2 - (-1) = 3$

El punto de corte entre r y s es $Q(-1, -1, 3)$.

3.1.2) ¿Plano π ? / r y $s \subset \pi$.

Para obtener la ecuación del plano π debemos obtener un punto y dos vectores directores de este plano.

Según calculado en el apartado anterior las rectas r y s se cortan en el punto Q .

Por lo tanto Q es un punto de π y los vectores directores del plano serán los de cada una de las rectas.

$$\text{recta } r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases} \rightarrow \vec{v}_r = (2, 1, -1)$$

$$\text{recta } s: \begin{cases} x = -1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}, \text{ obtengamos su ecuación paramétrica:}$$

sustituyendo en valor de x en la 2ª ecuación, $-1 + 2y + z = 0$; $z = 1 - 2y$, luego

$$s: \begin{cases} x = -1 \\ y = \mu \\ z = 1 - 2\mu \end{cases} \rightarrow \vec{v}_s = (0, 1, -2)$$

La ecuación del plano π ,

$$\begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z-3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (x+1) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - (y+1) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + (z-3) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x+1) \cdot (-1) - (y+1) \cdot (-4) + (z-3) \cdot 2 = 0$$

$$-x-1+4y+4+2z-6=0; \quad -x+4y+2z-3=0; \quad x-4y-2z+3=0$$

Por lo tanto, el plano que contiene a las rectas r y s es $\pi: x - 4y - 2z + 3 = 0$

3.1.3) La distancia del punto $P = (1, 0, 2)$ a dicho plano.

$$\text{Plano } \pi: x - 4y - 2z + 3 = 0. \text{ Por tanto, } d(P, \pi) = \frac{|1 - 4 \cdot 0 - 2 \cdot 2 + 3|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2 + (-2)^2}} = \frac{0}{\sqrt{21}} = 0 \rightarrow P \in \pi$$

La distancia del punto P al plano π es 0.

3.2 Se considera el plano $\pi: 3x - y + 2z = 4$ y el punto $P = (-1, 0, 1)$. Se pide:

3.2.1 (1 punto) La ecuación del plano perpendicular a π que pasa por P y $Q = (2, 1, 2)$.

3.2.2 (0.5 puntos) La distancia del punto Q al plano π .

3.2.3 (1 punto) El punto simétrico de P respecto del plano π .

Solución:

3.2.1) ¿Plano σ ? / $\sigma \perp \pi$ y $P(-1, 0, 1)$ y $Q(2, 1, 2) \in \sigma$.

Para obtener la ecuación del plano σ debemos obtener un punto y dos vectores directores de este plano.

$\sigma \perp \pi \rightarrow \vec{n}_\pi$ es vector director de σ .

P y $Q \in \sigma \rightarrow \begin{cases} \text{punto de } \sigma & P(-1, 0, 1) \\ \text{vector director de } \sigma & \vec{PQ}(3, 1, 1) \end{cases}$

La ecuación del plano σ ,

$$\begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (x+1) \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (z-1) \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x+1) \cdot (-3) - y \cdot (-3) + (z-1) \cdot 6 = 0$$

$$-3x - 3 + 3y + 6z - 6 = 0; \quad -3x + 3y + 6z - 9 = 0; \quad x - y - 2z + 3 = 0$$

Por lo tanto, el plano pedido es $\sigma: x - y - 2z + 3 = 0$

3.2.2) La distancia del punto $Q = (2, 1, 2)$ al plano $\pi: 3x - y + 2z - 4 = 0$.

$$d(Q, \pi) = \frac{|3 \cdot 2 - 1 + 2 \cdot 2 - 4|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{14}} \cong 1.3363$$

La distancia del punto Q al plano π es $\frac{5}{\sqrt{14}}$.

3.2.3) Simétrico de P respecto del plano π .

1º) Recta, r , que pasa por P y es perpendicular a π

De la recta r conocemos: $\begin{cases} \text{punto } P(-1, 0, 1) \\ \text{v. director, } r \perp \pi \rightarrow \vec{v}_r = \vec{n}_\pi(3, -1, 2) \end{cases}$

Las ecuaciones paramétricas de r , $r: \begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

2º) Punto de corte entre r y π (M).

Sustituyendo los valores de x, y, z de la recta en la ecuación del plano:

$$3(-1 + 3\lambda) - (-\lambda) + 2(1 + 2\lambda) = 4$$

$$-3 + 9\lambda + \lambda + 2 + 4\lambda = 4$$

$$14\lambda - 1 = 4 \rightarrow 14\lambda = 5 \rightarrow \lambda = \frac{5}{14}$$

Sustituyendo este valor en la ecuación de la recta r :

$$\begin{cases} x = -1 + 3 \frac{5}{14} = \frac{1}{14} \\ y = -\frac{5}{14} = \frac{-5}{14} \\ z = 1 + 2 \frac{5}{14} = \frac{12}{7} \end{cases}$$

Entonces $M\left(\frac{1}{14}, \frac{-5}{14}, \frac{12}{7}\right)$.

3º) El cálculo de P' podemos realizarlo de dos formas.

a) P' será tal que $\frac{P+P'}{2} = M$

$$P + P' = 2M \rightarrow P' = 2M - P = 2\left(\frac{1}{14}, \frac{-5}{14}, \frac{12}{7}\right) - (-1, 0, 1) = \left(\frac{2}{14} + 1, \frac{-10}{14}, \frac{24}{7} - 1\right) = \left(\frac{8}{7}, \frac{-5}{7}, \frac{17}{7}\right)$$

b) ¿ $A \in r$? / $d(A, \pi) = d(P, \pi)$

Como $A \in r \rightarrow A(-1 + 3\lambda, -\lambda, 1 + 2\lambda)$

$$d(P, \pi) = \frac{|3 \cdot (-1) - 0 + 2 \cdot 1 - 4|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{14}}$$

$$d(A, \pi) = \frac{5}{\sqrt{14}} \rightarrow \frac{|3(-1 + 3\lambda) - (-\lambda) + 2(1 + 2\lambda) - 4|}{\sqrt{14}} = \frac{5}{\sqrt{14}}; \quad |-3 + 9\lambda + \lambda + 2 + 4\lambda - 4| = 5;$$

$$|14\lambda - 5| = 5; \quad \begin{cases} 14\lambda - 5 = 5; & 14\lambda = 10; & \lambda = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}; & A\left(-1 + 3\frac{5}{7}, -\frac{5}{7}, 1 + 2\frac{5}{7}\right) = \left(\frac{8}{7}, \frac{-5}{7}, \frac{17}{7}\right) = P' \\ 14\lambda - 5 = -5; & 14\lambda = 0; & \lambda = 0; & A(-1, 0, 1) = P \end{cases}$$

Solución: $P'\left(\frac{8}{7}, \frac{-5}{7}, \frac{17}{7}\right)$.

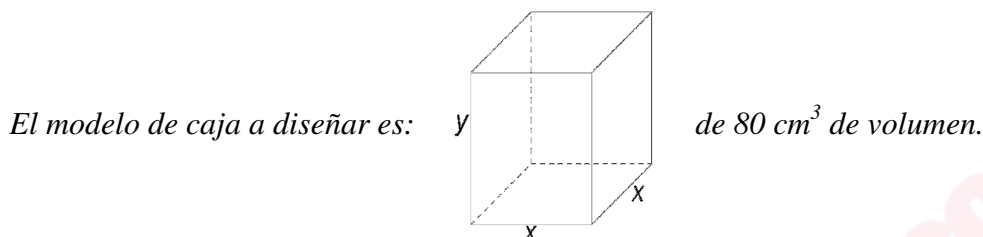
4.1 Una empresa de paquetería quiere diseñar distintos modelos de cajas. Uno de esos modelos consiste en una caja de 80 cm^3 de volumen, con base y tapa cuadradas. El precio del material de las paredes laterales es de 1 céntimo por cm^2 . La base y tapa se construirán con un material de calidad superior a las caras laterales de la caja, siendo éste un 25% más caro. Obtener:

4.1.1 **(0.75 puntos)** La función $P(x)$ que proporciona el precio del material de la caja en función del lado de la base x .

4.1.2 **(1.25 puntos)** Las dimensiones de la caja para que la función $P(x)$ tenga el menor valor posible.

4.1.3 **(0.75 puntos)** El precio del material en el caso anterior.

Solución:



El coste del material de las paredes laterales es 1 cent/cm^2 y

El coste del material de la base y la tapa es (un 25% más caro) $1.25 \cdot 1 \text{ cent/cm}^2 = 1.25 \text{ cent/cm}^2$

4.1.1 Obtener la función $P(x)$ que proporciona el precio del material de la caja en función del lado de la base x .

El área lateral de la caja es $4xy$, el área de la base y tapa es: $2x^2$

El precio del material de la caja sería: $1 \cdot 4xy + 1.25 \cdot 2x^2 = 4xy + 2.5x^2$

Para tener la expresión anterior sólo en función de x debemos buscar una relación entre x e y .

$$V_{\text{caja}} = x^2 y; \quad x^2 y = 80; \quad y = \frac{80}{x^2} \rightarrow P(x) = 2.5x^2 + 4x \frac{80}{x^2} = 2.5x^2 + \frac{320}{x}$$

Como x es el lado de la base, $x > 0$.

$$\text{Por tanto, } P(x) = 2.5x^2 + \frac{320}{x} \quad x > 0.$$

4.1.2 Las dimensiones de la caja para que la función $P(x)$ tenga el menor valor posible.

Debemos calcular el mínimo de $P(x)$

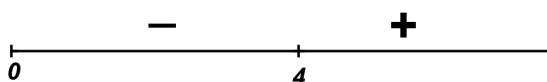
$$P'(x) = 5x - \frac{320}{x^2}$$

$$P'(x) = 0; \quad 5x - \frac{320}{x^2} = 0; \quad 5x^3 - 320 = 0; \quad 5x^3 = 320; \quad x^3 = \frac{320}{5}; \quad x^3 = 64; \quad x = \sqrt[3]{64} = 4$$

Calculemos el signo de $P'(x)$ a la izquierda y derecha de $x = 4$,

$$P'(1) = 5 \cdot 1 - \frac{320}{1^2} = -315 < 0$$

$$P'(5) = 5 \cdot 5 - \frac{320}{5^2} = 12.2 > 0$$



En $x = 4$ hay un mínimo local. Como a la izquierda de $x = 4$ la función es decreciente y a su derecha creciente este mínimo local es el absoluto de $P(x)$.

Para $x = 4$, $y = \frac{80}{4^2} = 5$.

Para que $P(x)$ tenga el menor valor posible las dimensiones de la caja deben ser: lado de la base 4 cm y altura de la caja 5 cm.

4.1.3 El precio del material en el caso anterior.

$$P(4) = 2'5 \cdot 4^2 + \frac{320}{4} = 120 \equiv 120 \text{ cent} \equiv 1'20 \text{ €}.$$

Para la caja obtenida en el apartado anterior el precio del material es de 1'20 €

Tu Profe al Rescate

4.2 Dada la función real de variable real

$$f(x) = x|x-2|.$$

Se pide:

4.2.1 (1 punto) Representar la región comprendida entre la gráfica de la función f , el eje de abscisas (eje OX) y las rectas $x = -1$ y $x = 5$.

4.2.2 (1.5 puntos) Calcular el área de la región anterior.

Solución:

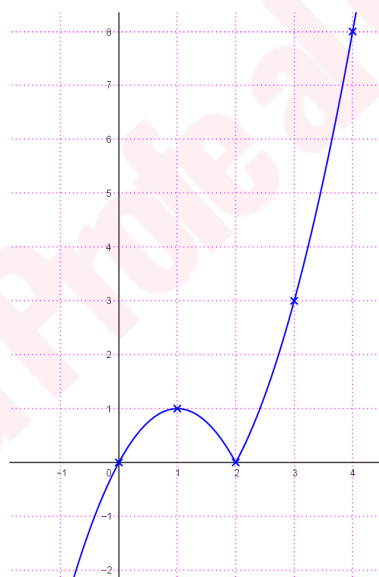
Obtenemos la expresión de $f(x)$ como función definida a trozos,

$$f(x) = x|x-2| = \begin{cases} x(-(x-2)), & x-2 < 0 \\ x(x-2) & , \quad x-2 \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -x^2 + 2x, & x < 2 \\ x^2 - 2x, & x \geq 2 \end{cases}$$

Ambos trozos de $f(x)$ son parábolas. Y como $f(0) = 0$ y $f(2) = 0$ tenemos sus puntos de corte con el eje OX; la representación de ambas la podemos completar mediante tablas de valores.

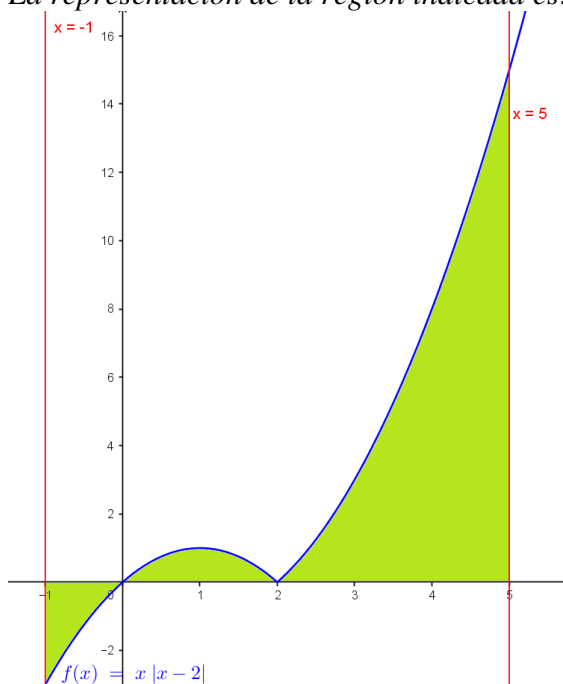
$x < 2$		$x \geq 2$	
x	$-x^2 + 2x$	x	$x^2 - 2x$
2	0	2	0
1	1	3	3
0	0	4	8

La representación de $f(x)$ sería:



4.2.1) Representar la región comprendida entre la gráfica de la función f , el eje de abscisas (eje OX) y las rectas $x = -1$ y $x = 5$.

La representación de la región indicada es:



4.2.2) Calcular el área de la región anterior.

Para obtener el área de la región anterior tenemos que calcular tres integrales definidas.

$$\int_{-1}^0 (-x^2 + 2x) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_{-1}^0 = 0 - \left(-\frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2 \right) = -\left(\frac{1}{3} + 1 \right) = -\frac{4}{3}$$

$$\int_0^2 (-x^2 + 2x) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^2 = \left(-\frac{2^3}{3} + 2^2 \right) - 0 = \left(-\frac{8}{3} + 4 \right) = \frac{4}{3}$$

$$\int_2^5 (x^2 - 2x) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_2^5 = \left(\frac{5^3}{3} - 5^2 \right) - \left(\frac{2^3}{3} - 2^2 \right) = \frac{50}{3} - \frac{4}{3} = \frac{54}{3}$$

$$\text{Finalmente el área la obtenemos: } A = \left| \frac{-4}{3} \right| + \frac{4}{3} + \frac{54}{3} = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{54}{3} = \frac{62}{3} \cong 20'6667$$

Solución el área de la región mide $\frac{62}{3}$ u.a. $\approx 20'6667$ u.a.