

Zahlenmengen*

Aufgabennummer: 1_710

Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐

Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)

Grundkompetenz: AG 1.1

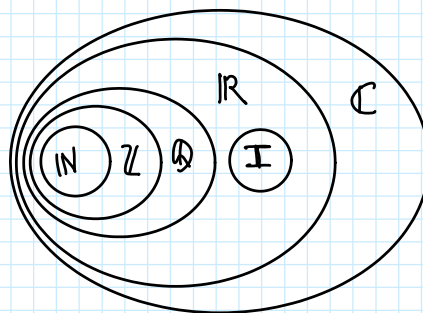
Zwischen Zahlenmengen bestehen bestimmte Beziehungen.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden wahren Aussagen an.

$\mathbb{Z}^+ \subseteq \mathbb{N}$	☐
$\mathbb{C} \subseteq \mathbb{Z}$	☐
$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}^-$	☐
$\mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{Q}$	☐
$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{C}$	☐

^
Mit der Bezeichnung
macht man sich das
Leben leichter!



So sieht man
sofort, welche Zahlen
Teil welcher Mengen
ist

- $\mathbb{Z}^+ \subseteq \mathbb{N}$: Die positiven ganzen Zahlen sind Teil der natürlichen Zahlen.



Das Symbol bedeutet,
dass die linke Menge
Teil der rechten ist!

Die Aussage ist korrekt! $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$
 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

- $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{Z}$: Die komplexen Zahlen sind Teil der ganzen Zahlen.

Die Aussage ist falsch! Die komplexen Zahlen sind nicht Teil der ganzen Zahlen.

- $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{Z}$: Die komplexen Zahlen sind Teil der ganzen Zahlen.
Die Aussage ist **falsch**! Die komplexen Zahlen enthalten alle Zahlen die es gibt (siehe Beschreibung!), während die ganzen Zahlen eine viel kleinere Menge sind!
Anders herum wäre die Aussage korrekt: $\mathbb{C} \supseteq \mathbb{Z}$
- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}^-$: Die natürlichen Zahlen sind Teil der negativen reellen Zahlen.
falsch! Natürliche Zahlen können nicht negativ sein!
- $\mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{Q}$: Die positive reellen Zahlen sind Teil der rationalen Zahlen.
falsch! Die reellen Zahlen sind die größere Menge, sie können nicht Teil der rationalen Zahlen sein!
- $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{C}$: Die rationalen Zahlen sind Teil d. komplexen Zahlen.
Richtig! Alle Zahlen sind Teil d. komplexen Zahlen

Ganze Zahlen und irrationale Zahlen

Gegeben sind vier Eigenschaften von Zahlen sowie sechs Zahlen.

Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den vier Eigenschaften von Zahlen jeweils die Zahl mit dieser Eigenschaft aus A bis F zu.

negative ganze Zahl	
negative irrationale Zahl	
positive ganze Zahl	
positive irrationale Zahl	

A	$2 - \sqrt{10}$
B	10^{-2}
C	$-\sqrt{10^2}$
D	$2 : (-10)$
E	$\sqrt{10} : 2$
F	$(-\sqrt{10})^2$

[0/½/1 P.]

Wichtig: $\sqrt{10}$ ist eine irrationale Zahl! Man kann sie nicht als Bruch schreiben, da sie unendlich viele Nachkommastellen hat, aber nicht periodisch ist. Es gilt $\sqrt{10} \approx 3,16$

hat, aber nicht periodisch ist. Es gilt $\sqrt{10} \approx 3,16$

Am besten geht man die Aussagen A-F durch und schaut, was von der linken Seite dazu passt.

A: $2 - \sqrt{10}$. Das Ergebnis ist sicher irrational, weil $\sqrt{10}$ unverändert darin vorkommt. Es ist auch sicher negativ, weil $2 - 3,16$ kleiner als 0 ist. $\rightarrow$ negativ + irrational

B: $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0,01 \rightarrow$ einfach in den TR entippen!

$\rightarrow$ siehe Rechenregeln für Potenzen!

0,01 ist eine positive + rationale Zahl, nicht ganz!

C: $-\sqrt{10^2} = -\sqrt{100} = -10 \rightarrow$ TR! $\rightarrow -10$ ist negativ + ganz
 $\rightarrow$ das Minus ist nicht in d. Wurzel!

D: $2 : (-10) = -\frac{2}{10} = -\frac{1}{5} = -0,2 \rightarrow$ negativ + rational, nicht ganz!

E: $\frac{\sqrt{10}}{2}$, $\sqrt{10}$ kommt wieder unverändert vor $\rightarrow$ irrational und positiv

F: $(-\sqrt{10})^2 = (-\sqrt{10}) \cdot (-\sqrt{10}) = \sqrt{10}^2 = 10 \rightarrow$ TR!
 $\rightarrow$ positiv und ganz!

Lösung:

C
A
F
E

Rationale Zahlen*

Aufgabennummer: 1_129

Typ 1 ☒ Typ 2 ☐ technologiefrei ☐

Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)

Gegeben sind folgende Zahlen: $-\frac{1}{2}$; $\frac{\pi}{5}$; $3,\dot{5}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{-1}$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden rationalen Zahlen an.

$-\frac{1}{2}$	☐
$\frac{\pi}{5}$	☐
$3,\dot{5}$	☐
$\sqrt{3}$	☐
$\sqrt{-1}$	☐

Wichtig: rationale Zahlen kann man als Bruch ganzer Zahlen schreiben!
 Dazu gehören alle endlichen Dezimalzahlen, z.B. $2,375 = 2\frac{375}{1000}$
 und alle periodischen Zahlen; z.B. $0,\dot{6} = \frac{6}{9}$

- $-\frac{1}{2}$, steht bereits als Bruch ganzer Zahlen da; ist also sicher **rational!**
- $\frac{\pi}{5}$; π ist eine irrationale Zahl! $\rightarrow$ ein Fünftel von π ist also auch **irrational!**
- $3,\dot{5}$; kann man als Bruch schreiben: $3\frac{5}{9} \rightarrow$ **rational!**

Tipp: Periodische Zahlen schreibt man immer als $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{99}$; ...
 z.B.: $0,\overline{378} = \frac{378}{999}$

Ohne die Periodizität wäre es
378 1

$$\frac{378}{1000} !$$

- $\sqrt{3}$ ist eine **irrationale** Zahl! Genauso wie $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{10}, \dots$
- $\sqrt{-1}$ ist nicht lösbar, weil negative Zahlen keine reelle Wurzel haben!
 → **komplex aber nicht rational**

Summe und Produkt zweier Zahlen

Für zwei Zahlen a und b mit $a, b \in \mathbb{R}$ gilt: $a + b = a \cdot b$

Aufgabenstellung:

Begründen Sie allgemein, warum es unter dieser Voraussetzung nicht möglich ist, dass sowohl a als auch b negativ sind.

[0/1 P.]

Wenn a und b beide negativ sind, ist $a + b$ auch sicher negativ, z.B.: $(-2) + (-3) = -5$. Das Produkt hingegen ist sicher positiv! $\rightarrow (-2) \cdot (-3) = 5$
 Gilt $a + b = a \cdot b$ können also nicht a und b negativ sein!

Rechenoperationen*

Aufgabennummer: 1_686

Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐

Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)

Grundkompetenz: AG 1.1

Für zwei ganze Zahlen a, b mit $a < 0$ und $b < 0$ gilt: $b = 2 \cdot a$.

Aufgabenstellung:

Welche der nachstehenden Berechnungen haben stets eine natürliche Zahl als Ergebnis?
Kreuzen Sie die beiden zutreffenden Berechnungen an!

$a + b$	☐
$b : a$	☐
$a : b$	☐
$a \cdot b$	☐
$b - a$	☐

Wir wissen, dass a und b beide negativ sind und dass $b = 2 \cdot a$ gilt (z.B.: $a = -2$; $b = -4$)

- $a + b$ ist sicher negativ, also kann das Ergebnis keine natürliche Zahl sein!
- $\frac{b}{a} = \frac{2a}{a} = 2$, es kommt also eine natürliche Zahl heraus!

↳ weil $b = 2a$!

- $\frac{a}{b} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$, also keine natürliche Zahl!
- $a \cdot b = a \cdot 2a = 2a^2$, Quadratzahlen sind immer positiv!
Wenn a eine ganze Zahl ist, ist a^2 sicher eine natürliche Zahl!
z.B.: $2 \cdot (-3)^2 = 18$
- $b - a = 2a - a = a \rightarrow a$ ist negativ also keine natürliche Zahl!

Lösung:



Bei solchen Beispielen ist es immer gut Zahlen einzusetzen! z.B. $a = -3 \rightarrow b = 2 \cdot (-3) = -6$

Lineare Gleichung

Gegeben ist die folgende Gleichung in der Variablen $x \in \mathbb{Z}$:

$$2 \cdot x - c = 0 \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}$$

Aufgabenstellung:

Geben Sie alle reellen Zahlen c an, für die diese Gleichung eine Lösung in $\mathbb{Z}$ hat.

[0/1 P.]

Um das Bsp. zu lösen, lösen wir die Gleichung:

$$2x - c = 0 \quad | +c$$

$$2x = c \quad | :2$$

$$x = \frac{c}{2}$$

Das Ergebnis soll eine ganze Zahl sein. $\frac{c}{2}$ ist nur eine ganze Zahl wenn c durch 2 teilbar ist!

$$\text{z.B.: } \frac{2}{2} = 1, \quad \frac{4}{2} = 2, \quad \frac{-6}{2} = -3$$

$$c = \{\dots, -2, 0, 2, 4, \dots\}$$

Äquivalente Gleichungen*

Aufgabennummer: 1_734

Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐

Aufgabenformat: Multiple Choice (2 aus 5)

Grundkompetenz: AG 1.2

Gegeben ist die Gleichung $\frac{x}{2} - 4 = 3$ in $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie die beiden nachstehenden Gleichungen in $x \in \mathbb{R}$ an, die zur gegebenen Gleichung äquivalent sind.

$x - 4 = 6$	☐
$\frac{x}{2} = -1$	☐
$\frac{x}{2} - 3 = 4$	☐
$\frac{x-8}{2} = 3$	☐
$\left(\frac{x}{2} - 4\right)^2 = 9$	☐

Wir überprüfen für alle Antworten, ob wir die originale Gleichung so umformen können, dass die jeweilige Antwort herauskommt.

- $x - 4 = 6$: Dass x steht alleine da, also müssen wir $\frac{x}{2} - 4 = 3$ mal 2 rechnen:

$$\frac{x}{2} - 4 = 3 \quad | \cdot 2$$

$$x - 8 = 6$$

↖ auch die 4 muss $\cdot 2$ gerechnet werden!

Die Antwort ist also falsch!

- $\frac{x}{2} = -1$: Wir müssen die 4 nach rechts bringen:

$$\frac{x}{2} - 4 = 3 \quad | +4$$

$$\frac{x}{2} = 7$$

$$x = 14$$

$$\frac{x}{2} = 7$$

Die Antwort ist auch falsch!

- $\frac{x}{2} - 3 = 4$: Die 3 und die 4 haben Plätze gewechselt:

$$\frac{x}{2} - 4 = 3 \quad | +4 \quad | -3$$

$$\frac{x}{2} - 3 = 4 \rightarrow \text{korrekt!}$$

- $\frac{x-8}{2} = 3$: Wenn man den Bruch auflöst, also x und 8 durch 2 dividiert, bekommt man folgendes:

$$\frac{x}{2} - \frac{8}{2} = 3 \rightarrow \frac{x}{2} - 4 = 3$$

korrekt!

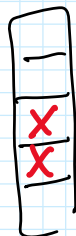
- $(\frac{x}{2} - 4)^2 = 9$: Die Umformung selbst ist korrekt, weil:

$$\frac{x}{2} - 4 = 3 \quad |^2$$

$$(\frac{x}{2} - 4)^2 = 3^2 = 9$$

Allerdings handelt es sich jetzt um eine quadratische Gleichung, die 2 Lösungen hat, nicht nur eine! Es ist also keine Äquivalenzumformung! Falsch!

Lösung:



Lösung einer Gleichung*

Aufgabennummer: 1_807

Aufgabentyp: Typ 1 ☒ Typ 2 ☐

Aufgabenformat: Multiple Choice (1 aus 6)

Grundkompetenz: AG 1.2

Nachstehend ist eine Gleichung in $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

$$\sqrt{2 \cdot x - 6} = a \text{ mit } a \in \mathbb{R}_0^+$$

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie dasjenige Intervall an, das für alle Werte von $a \in \mathbb{R}_0^+$ die Lösung der gegebenen Gleichung enthält.

$(-\infty; -3]$	☐
$[3; \infty)$	☐
$[-3; 0)$	☐
$[0; 3)$	☐
$[-6; -3)$	☐
$[3; 6]$	☐

Damit die Gleichung eine Lösung hat, muss unter der Wurzel eine positive Zahl stehen:

$$\begin{aligned} 2x - 6 &\geq 0 && | +6 \\ 2x &\geq 6 && | :2 \\ x &\geq 3 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \geq \text{ weil } 0 \text{ auch ok ist! } \sqrt{0} = 0$$

$$\rightarrow [3; \infty)$$

← richtig wegen $\geq$!