

Septiembre de 2012 - Convocatoria extraordinaria

En el examen se elige A o B. Aquí desarrollamos las dos opciones paso a paso para que puedas seguir las operaciones y comprobar los resultados.

Opción A

Problema A.1 - Sistema homogéneo con parámetro

El sistema del enunciado es

$$S_{\alpha} : \begin{cases} x - 2y - 3z = 0, \\ 3x + 10y - z = 0, \\ x + 14y + \alpha z = 0. \end{cases}$$

Es homogéneo: el vector de términos independientes es nulo. La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A_{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 10 & -1 \\ 1 & 14 & \alpha \end{pmatrix}, \quad A_{\alpha}^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 3 & 10 & -1 & 0 \\ 1 & 14 & \alpha & 0 \end{array} \right).$$

Determinante y discusión del parámetro. Para saber cuándo la matriz cuadrada tiene rango 3, calculamos su determinante. Desarrollando por la primera fila:

$$\begin{aligned} \det A_{\alpha} &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 10 & -1 \\ 1 & 14 & \alpha \end{vmatrix} \\ &= (10\alpha + 14) + 2(3\alpha + 1) - 3(42 - 10) \\ &= 10\alpha + 14 + 6\alpha + 2 - 96 \\ &= 16\alpha - 80 = 16(\alpha - 5). \end{aligned}$$

Por tanto, el determinante se anula si y solo si $\alpha = 5$.

Caso $\alpha \neq 5$. Entonces $\det A_{\alpha} \neq 0$, así que $\text{rg}(A_{\alpha}) = 3$. La matriz ampliada tiene el mismo rango: contiene esas tres columnas y no puede tener rango mayor que 3 porque solo tiene tres filas. Por Rouché-Frobenius, $\text{rg}(A_{\alpha}) = \text{rg}(A_{\alpha}^*) = 3$, igual al número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado**. Al ser homogéneo, su única solución es la trivial.

Caso $\alpha = 5$. El determinante es cero y debemos calcular los rangos. El menor de orden 2 de las filas 1 y 2 y las columnas x, y vale

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = 10 + 6 = 16 \neq 0,$$

Así que $\text{rg}(A_5) \geq 2$; como el determinante de orden 3 es cero, $\text{rg}(A_5) = 2$. En la ampliada se cumple

$$(1, 14, 5 \mid 0) = -2(1, -2, -3 \mid 0) + (3, 10, -1 \mid 0),$$

De modo que la tercera fila depende de las dos primeras. El mismo menor no nulo prueba que $\text{rg}(A_5^*) = 2$. Por Rouché-Frobenius,

$$\text{rg}(A_5) = \text{rg}(A_5^*) = 2 < 3,$$

Y el sistema es **compatible indeterminado**.

a) Solución cuando $\alpha = 0$. Sustituimos en el determinante:

$$\det A_0 = 16(0) - 80 = -80 \neq 0.$$

Entonces $\text{rg}(A_0) = \text{rg}(A_0^*) = 3$, y por Rouché-Frobenius hay una única solución. Como el sistema es homogéneo, $(0, 0, 0)$ satisface las tres ecuaciones; por unicidad, la solución es $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

b) Valor con infinitas soluciones. El sistema homogéneo tiene infinitas soluciones exactamente cuando su matriz de coeficientes pierde rango 3 sin que la ampliada aumente el rango. La discusión anterior muestra que esto ocurre para

$$\boxed{\alpha = 5}.$$

c) Todas las soluciones para $\alpha = 5$. Tomamos $z = t$, con $t \in \mathbb{R}$. De la primera ecuación,

$$x - 2y - 3t = 0 \implies x = 2y + 3t.$$

Sustituimos en la segunda:

$$3(2y + 3t) + 10y - t = 0 \implies 16y + 8t = 0 \implies y = -\frac{t}{2}.$$

Por tanto, $x = 2(-t/2) + 3t = 2t$, y la tercera ecuación queda satisfecha. La familia completa es

$$\boxed{(x, y, z) = \left(2t, -\frac{t}{2}, t\right), t \in \mathbb{R}.$$

Problema A.2 - Recta y plano

La recta se da como intersección de dos planos y el otro plano es

$$r : \begin{cases} x + y - z = 1, \\ x - y - z = 0, \end{cases} \pi : x + mz = 0.$$

a) Vector director y forma paramétrica de r . Restamos la segunda ecuación de la primera para hallar y :

$$(x + y - z) - (x - y - z) = 1 - 0 \implies 2y = 1 \implies y = \frac{1}{2}.$$

Al sumar las dos ecuaciones obtenemos $2x - 2z = 1$, es decir, $x - z = \frac{1}{2}$. Tomamos $z = t$, con $t \in \mathbb{R}$; entonces $x = t + \frac{1}{2}$. Así,

$$r : \begin{cases} x = \frac{1}{2} + t, \\ y = \frac{1}{2}, \\ z = t, \end{cases} t \in \mathbb{R}, \quad \boxed{\vec{d} = (1, 0, 1)}.$$

b) Valor de m para que la recta sea perpendicular al plano. El vector normal del plano general $x + mz = 0$ es $\vec{n}_\pi = (1, 0, m)$. Una recta es perpendicular a un plano cuando su vector director es paralelo al normal:

$$(1, 0, 1) = \lambda(1, 0, m).$$

La primera coordenada da $\lambda = 1$; la tercera, $1 = m$. Por tanto,

$$\boxed{m = 1}.$$

c) Valor de m para que la recta sea paralela al plano. Para que la dirección de la recta sea paralela al plano, debe ser perpendicular al normal. Usamos el producto escalar:

$$\vec{d} \cdot \vec{n}_\pi = (1, 0, 1) \cdot (1, 0, m) = 1 + m.$$

La condición es $1 + m = 0$, luego

$$\boxed{m = -1}.$$

d) Distancia entre r y π para $m = -1$. El plano pasa a ser $x - z = 0$, con normal $(1, 0, -1)$. Como la recta es paralela al plano, su distancia es la distancia de cualquier punto de la recta al plano. Para $t = 0$, $P = (1/2, 1/2, 0)$. Aplicamos la fórmula punto-plano:

$$d(P, \pi) = \frac{|1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot 0|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{1/2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Problema A.3 - Estudio de dos funciones y área

Se estudian $f(x) = -x^2 + 2x$ y $g(x) = x^2$. Ambas son polinómicas, por lo que

$$\text{Dom}(f) = \text{Dom}(g) = \mathbb{R}.$$

a) Crecimiento y decrecimiento. Para hallar los cambios de monotonicidad, derivamos e igualamos cada derivada a cero.

Para f :

$$f'(x) = -2x + 2, \quad -2x + 2 = 0 \implies x = 1.$$

Probamos un valor menor y otro mayor: $f'(0) = 2 > 0$ y $f'(2) = -2 < 0$.

Intervalo o punto **Valor de prueba en f'** **Signo** **Comportamiento**

$(-\infty, 1)$	$x = 0 : f'(0) = 2$	+	Crece
$x = 1$	$f'(1) = 0$	0	Punto crítico
$(1, +\infty)$	$x = 2 : f'(2) = -2$	-	Decrece

Como el signo cambia de $+$ a $-$, f tiene un máximo en $x = 1$. Su altura es

$$f(1) = -(1)^2 + 2(1) = 1, \quad \text{máximo de } f : (1, 1).$$

Para g :

$$g'(x) = 2x, \quad 2x = 0 \implies x = 0.$$

Probamos a ambos lados: $g'(-1) = -2 < 0$ y $g'(1) = 2 > 0$.

Intervalo o punto **Valor de prueba en g'** **Signo** **Comportamiento**

$(-\infty, 0)$	$x = -1 : g'(-1) = -2$	-	Decrece
$x = 0$	$g'(0) = 0$	0	Punto crítico
$(0, +\infty)$	$x = 1 : g'(1) = 2$	+	Crece

El cambio de $-$ a $+$ da un mínimo en $x = 0$, y

$$g(0) = 0, \quad \text{mínimo de } g : (0, 0).$$

Comprobación de asíntotas. Ninguna función tiene asíntotas verticales: las dos están definidas y son finitas para todo $x \in \mathbb{R}$. Tampoco tienen asíntotas horizontales, pues $f(x) \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$, mientras que $g(x) \rightarrow +\infty$. Para una posible asíntota oblicua calculamos el límite que daría su pendiente:

$$\frac{f(x)}{x} = -x + 2, \quad \frac{g(x)}{x} = x.$$

Ninguno tiene límite finito cuando $x \rightarrow \pm\infty$; por tanto, ninguna de las funciones tiene asíntota oblicua.

c) Puntos de intersección. En los puntos de corte las dos ordenadas coinciden:

$$-x^2 + 2x = x^2 \implies 2x(1 - x) = 0 \implies x = 0 \text{ o } x = 1.$$

Sustituimos en cualquiera de las funciones: para $x = 0, y = 0$; para $x = 1, y = 1$. Así,

$$(0, 0) \text{ y } (1, 1).$$

d) Área entre las curvas en $[0, 1]$. En ese intervalo,

$$f(x) - g(x) = (-x^2 + 2x) - x^2 = 2x(1 - x) \geq 0,$$

por lo que f es la función superior y g la inferior. Usamos la regla «superior menos inferior»:

$$A = \int_0^1 (f(x) - g(x)) dx = \int_0^1 (-2x^2 + 2x) dx.$$

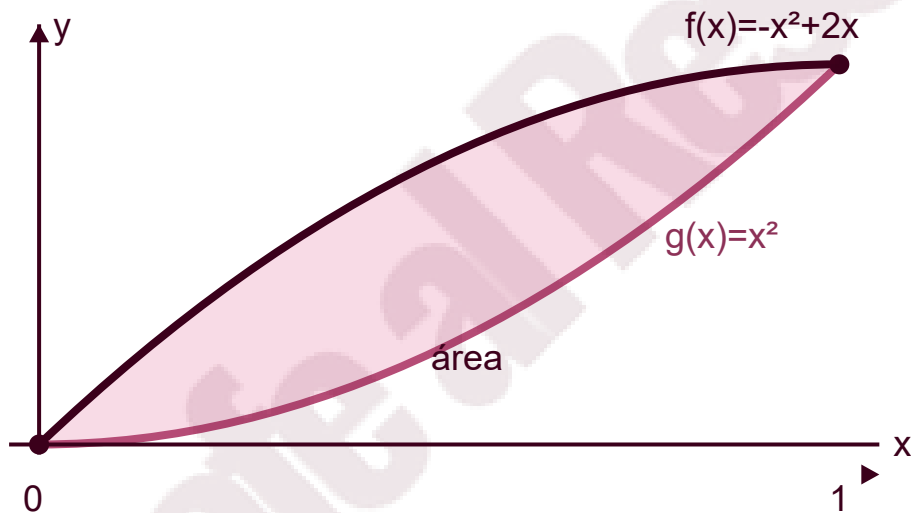
Integramos cada término:

$$\int (-2x^2 + 2x) dx = -\frac{2}{3}x^3 + x^2 + C.$$

Evaluamos en los extremos del intervalo:

$$\begin{aligned} A &= \left[-\frac{2}{3}x^3 + x^2 \right]_{x=0}^{x=1} \\ &= \left(-\frac{2}{3} + 1 \right) - 0 \\ &= \boxed{\frac{1}{3} \text{ unidades}^2}. \end{aligned}$$

Gráfico propio en el intervalo pedido: la región coloreada es la comprendida entre ambas funciones.



Opción B

Problema B.1 - Operaciones con matrices

El enunciado da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B^2 = -7B + U,$$

donde U es la identidad de orden 2.

a) Hallar a y b para que $A^2 = aA + bU$. Primero calculamos la potencia mediante el producto de matrices:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por otra parte,

$$aA + bU = a \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & -a \\ a & a+b \end{pmatrix}.$$

Igualamos entradas correspondientes:

$$-a = -2 \implies a = 2, a + b = 0 \implies b = -2.$$

Así,

$$\boxed{a = 2, b = -2}.$$

b) Hallar p, q y justificar que B tiene inversa. Partimos de la relación del enunciado y sumamos $7B$ a ambos lados:

$$B^2 = -7B + U \implies B^2 + 7B = U.$$

Como U es la identidad,

$$B(B + 7U) = B^2 + 7B = U.$$

Así, $B + 7U$ es una inversa de B (para matrices cuadradas, tener una inversa por un lado basta). Luego

$$B^{-1} = B + 7U.$$

Al comparar con $B^{-1} = pB + qU$, obtenemos

$$\boxed{p = 1, q = 7}.$$

c) Hallar x, y para que $B^3 = xB + yU$. Ya conocemos

$$B^2 = -7B + U.$$

Multiplicamos por B y volvemos a sustituir B^2 :

$$\begin{aligned} B^3 &= B^2 B \\ &= (-7B + U)B \\ &= -7B^2 + B \\ &= -7(-7B + U) + B \\ &= 50B - 7U. \end{aligned}$$

Por comparación con $xB + yU$,

$$\boxed{x = 50, y = -7}.$$

Las potencias se reducen usando la identidad dada; no se obtiene un ciclo que vuelva a U .

Problema B.2 - Recta intersección de planos

Los planos, escritos en forma general, son

$$\pi : 2x - y + z - 3 = 0, \sigma : x - y + z - 2 = 0, \tau : 3x - y - az - b = 0.$$

a) Punto, vector director y ecuaciones paramétricas de $r = \pi \cap \sigma$. Restamos las ecuaciones de π y σ :

$$(2x - y + z) - (x - y + z) = 3 - 2 \implies x = 1.$$

Sustituimos en σ :

$$1 - y + z = 2 \implies z = y + 1.$$

Tomando $y = t$, con $t \in \mathbb{R}$, queda

$$r : \begin{cases} x = 1, \\ y = t, \\ z = 1 + t. \end{cases}$$

El punto correspondiente a $t = 0$ es $P = (1, 0, 1)$, y el vector que acompaña a t es $\vec{d} = (0, 1, 1)$. Por tanto,

$$P = (1, 0, 1), \vec{d} = (0, 1, 1), r : \begin{cases} x = 1, \\ y = t, \\ z = 1 + t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

b) Plano que contiene r y pasa por $Q = (2, 1, 3)$. Desde P hasta Q tenemos

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (2 - 1, 1 - 0, 3 - 1) = (1, 1, 2).$$

Un vector normal del plano es el producto vectorial de las dos direcciones que lo generan:

$$\vec{n} = \vec{d} \times \overrightarrow{PQ} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (1, 1, -1).$$

Usamos la ecuación general de un plano con normal (A, B, C) que pasa por (x_0, y_0, z_0) :

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Sustituyendo $(A, B, C) = (1, 1, -1)$ y $P = (1, 0, 1)$:

$$(x - 1) + y - (z - 1) = 0 \implies \boxed{x + y - z = 0}.$$

Comprobación: P y Q verifican la ecuación, y el vector director de r es paralelo al plano porque $(1, 1, -1) \cdot (0, 1, 1) = 0$.

c) Valores de a, b para que τ contenga r . Todo punto de la recta tiene coordenadas $(1, t, 1 + t)$. Para que pertenezca al plano τ , debe cumplir su ecuación para cualquier t :

$$3(1) - t - a(1 + t) = b.$$

Agrupamos el término constante y el que depende de t :

$$(3 - a) + (-1 - a)t = b \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

El coeficiente de t debe ser cero y la constante debe coincidir con b :

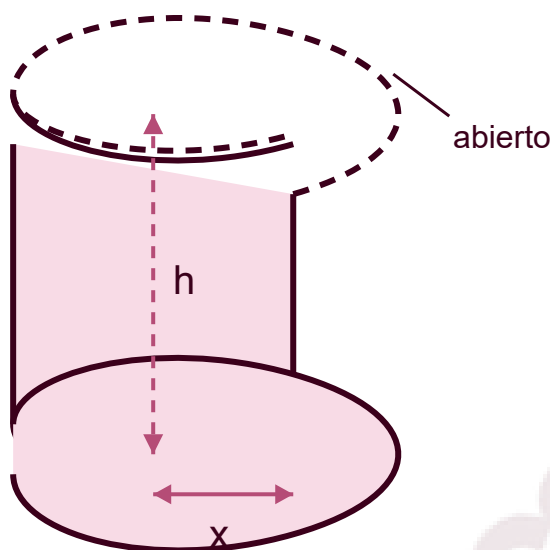
$$-1 - a = 0 \implies a = -1, \quad 3 - a = b \implies b = 4.$$

Por tanto,

$$\boxed{a = -1, b = 4}.$$

Problema B.3 - Coste mínimo de un depósito cilíndrico

El depósito tiene radio de base x , altura h , capacidad 100 m^3 y no tiene tapa. Como un radio es positivo, el dominio del coste será $x > 0$.



a) **Área de la base.** La base es un círculo de radio x . Su área es

$$A_b = \pi r^2 \implies \boxed{A_b(x) = \pi x^2 \text{ m}^2}.$$

b) **Área de la pared lateral.** El área lateral de un cilindro es circunferencia de la base por altura:

$$A_l = 2\pi x h.$$

Para expresar esta área solo en función de x , usamos primero la ley del volumen:

$$V = \pi x^2 h = 100 \text{ m}^3 \implies h = \frac{100}{\pi x^2} \text{ m}.$$

Sustituimos en el área lateral y simplificamos:

$$A_l(x) = 2\pi x \left(\frac{100}{\pi x^2} \right) = \boxed{\frac{200}{x} \text{ m}^2}.$$

c) **Función de coste.** El material de la base cuesta 4 euros por metro cuadrado, mientras que el de la pared cuesta 2 euros por metro cuadrado. Multiplicamos cada precio por su área:

$$C_b = 4 \cdot \pi x^2 = 4\pi x^2,$$

$$C_l = 2 \cdot \frac{200}{x} = \frac{400}{x}.$$

La unidad de ambas cantidades es el euro, porque en cada caso se multiplica un precio en euros por metro cuadrado por un área en metros cuadrados. El coste total es la suma:

$$\boxed{C(x) = 4\pi x^2 + \frac{400}{x}}, \quad x \in (0, +\infty).$$

d) **Radio que minimiza el coste y coste mínimo.** Estudiamos el dominio y las asíntotas antes de optimizar. Como $x > 0$, el único punto finito excluido del dominio es $x = 0$, y

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} C(x) = +\infty,$$

por lo que $x = 0$ es asíntota vertical. Cuando $x \rightarrow +\infty$, $C(x) \rightarrow +\infty$, así que no hay asíntota horizontal. Para una posible oblicua,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{C(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(4\pi x + \frac{400}{x^2} \right) = +\infty;$$

no existe pendiente finita y no hay asíntota oblicua.

Derivamos la función y buscamos sus puntos críticos dentro del dominio:

$$C'(x) = 8\pi x - \frac{400}{x^2} = \frac{8\pi x^3 - 400}{x^2}.$$

Como $x^2 > 0$, los puntos críticos se obtienen de $8\pi x^3 - 400 = 0$:

$$8\pi x^3 = 400 \Rightarrow x^3 = \frac{50}{\pi} \Rightarrow x_0 = \sqrt[3]{\frac{50}{\pi}} \text{ m.}$$

Comprobamos el signo de la derivada en puntos de prueba a ambos lados. Usando $\pi x_0^3 = 50$:

$$C'\left(\frac{x_0}{2}\right) = 4\pi x_0 - \frac{1600}{x_0^2} = \frac{200 - 1600}{x_0^2} < 0, \quad C'(2x_0) = 16\pi x_0 - \frac{100}{x_0^2} = \frac{800 - 100}{x_0^2} > 0.$$

Intervalo o punto	Valor de prueba en C'	Signo	Comportamiento
$(0, x_0)$	$x = x_0/2 : C'(x_0/2) = -1400/x_0^2$	-	Decrece
$x = x_0$	$C'(x_0) = 0$	0	Punto crítico; dominio válido
$(x_0, +\infty)$	$x = 2x_0 : C'(2x_0) = 700/x_0^2$	+	Crece

En el punto excluido $x = 0$ la función no está definida; no es un máximo ni un mínimo. La derivada cambia de negativa a positiva en x_0 , por lo que allí hay un mínimo. Además, el coste tiende a infinito en ambos extremos del dominio $(0, +\infty)$; por tanto, ese mínimo es absoluto.

Para calcular el coste exacto, usamos $8\pi x_0^3 = 400$, de donde $400/x_0 = 8\pi x_0^2$:

$$\begin{aligned} C_{\min} &= 4\pi x_0^2 + \frac{400}{x_0} \\ &= 12\pi x_0^2 = \frac{600}{x_0} \\ &= 600 \sqrt[3]{\frac{\pi}{50}}. \end{aligned}$$

En conclusión,

$$x_0 = \sqrt[3]{\frac{50}{\pi}} \approx 2.5154, \quad C_{\min} = 600 \sqrt[3]{\frac{\pi}{50}} \approx 238.53.$$

El radio está expresado en metros y el coste en euros. La altura correspondiente es $h = 100/(\pi x_0^2) = 2x_0 \approx 5.0308$, es decir, aproximadamente **5.0308** metros, que verifica la capacidad requerida.