



SÈRIE 1

Exercici 1

1.1.

Com que les tres funcions que defineixen f són contínues en els seus respectius intervals de definició, només cal imposar que f sigui contínua als punts de contacte, $x = 0$ i $x = 2$. Tenim

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 5e^{2x} = 5,$$

$$f(0) = 5e^0 = 5,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + m)^2 + 1 = m^2 + 1.$$

Per tant, la funció f és contínua en $x = 0$ si i només si $m^2 + 1 = 5$, cosa que passa si i només si $m = \pm 2$. D'altra banda,

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x + m)^2 + 1 = (2 + m)^2 + 1,$$

$$f(2) = 1,$$

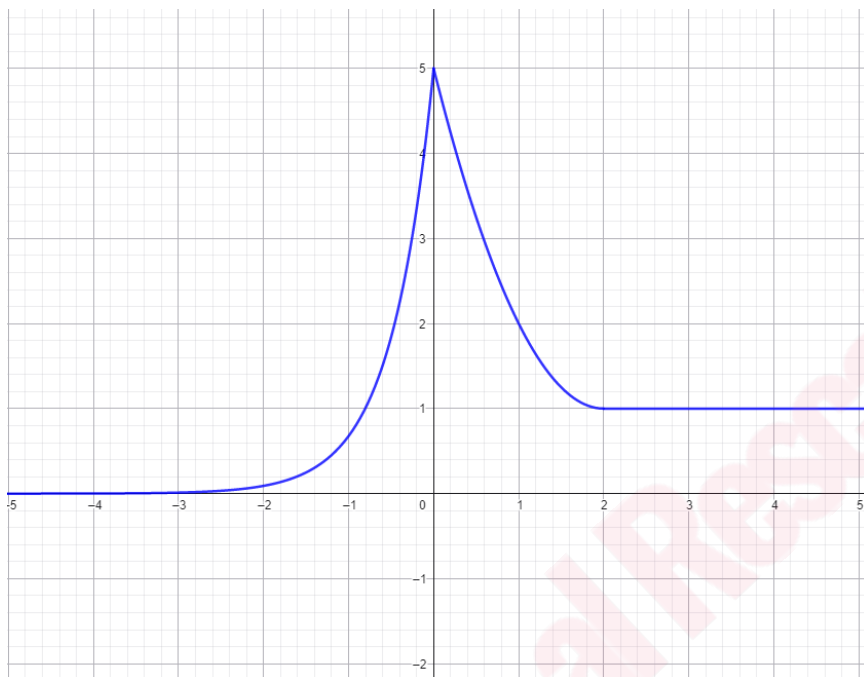
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 1 = 1,$$

i la funció f és contínua en $x = 2$ si i només si $(2 + m)^2 + 1 = 1$, cosa que passa si i només si $m = -2$. Per tant, la funció és contínua en tots els punts només quan $m = -2$.



1.2.

La gràfica corresponent és:



Per representar la funció quadràtica es pot calcular el vèrtex amb la fórmula $x = \frac{-b}{2a} = 2$ o bé observar que és una translació 2 unitats a la dreta i una unitat amunt de la paràbola $y = x^2$.

És clar, fins i tot sense la gràfica, que la funció és positiva en tot el seu domini. Per tant per calcular l'àrea demanada ens cal calcular la integral definida:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^3 f(x) dx = \int_{-1}^0 5e^{2x} dx + \int_0^2 ((x-2)^2 + 1) dx + \int_2^3 1 dx = \\ &= \left[\frac{5}{2} e^{2x} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{(x-2)^3}{3} + x \right]_0^2 + [x]_2^3 = \frac{5}{2} - \frac{5}{2e^2} + 2 + \frac{8}{3} + 3 - 2 \approx 7,83 u^2. \end{aligned}$$



1.3.

Com que el primer tram de la gràfica és creixent, i el tercer és pla, només pot haver-hi punts amb pendent negativa al tram del mig. Volem un punt on el pendent sigui -2 , per tant derivem el tram parabòlic i igulem la derivada a -2 :

$$2(x - 2) = -2 \rightarrow x = 1.$$

La recta tangent al punt $(1, f(1)) = (1, 2)$ és

$$y - 2 = -2(x - 1) \rightarrow y = -2x + 4.$$

Pautes de correcció: (1.1) Compteu 0,25 punts per justificar que ja és contínua fora dels punts de contacte; 0,25 per estudiar cadascun dels dos contactes, i 0,25 per combinar-ho i donar la resposta final correcta. (1.2) Compteu 0,25 per l'esbós de la gràfica; 0,25 pel planteig correcte de l'àrea com a suma d'integrals; 0,25 pel càlcul de la integral de la part exponencial, i 0,25 per la integral de la part parabòlica. (1.3) Compteu 0,25 per trobar el punt i 0,25 pel càlcul de l'equació de la recta tangent.



Exercici 2

2.1.

La matriu de coeficients i la matriu ampliada del sistema són:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad i \quad \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ m & 1 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

Calculant el determinant de la matriu A , tenim

$$\begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + m^2 + 1 - 3m - 1 - m = m^2 - 4m + 3.$$

Per obtenir els valors crítics, fem

$$|A| = 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = 3, 1.$$

En el cas $m \neq 1, 3$, tenim $|A| \neq 0$, $\text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A}) = 3$ i, com que hi ha tres incògnites, el sistema és compatible determinat.

En el cas $m = 3$, tenim $|A| = 0$ i $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ per tant $\text{rang}(A) = 2$. Per altra banda,

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$$

i deduïm que $\text{rang}(\bar{A}) = 3$ i que el sistema és incompatible en aquest cas.

Finalment, en el cas $m = 1$, tenim $|A| = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$, $\text{rang}(A) = 2$, i també $\text{rang}(\bar{A}) = 2$ per tenir la primera i tercera files iguals. En aquest cas, el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat.

2.2.

Es tracta de tres plans a l'espai, que estan en diverses posicions relatives depenent del valor del paràmetre: d'acord amb la discussió de l'apartat anterior, si $m \neq 1, 3$, el sistema és compatible determinat, la qual cosa significa que els tres plans es tallen en un únic punt comú. Si $m = 3$ és incompatible, cosa que vol dir que no tenen cap punt en comú: això es pot veure directament observant que, en aquest cas, el primer pla, $x + 3y + z = 4$, i el segon, $x + 3y + z = 5$, són paral·lels i no coincidents. Finalment, si $m = 1$ el sistema és compatible indeterminat amb un grau de llibertat i els tres plans s'intersequen en una recta comuna. Per trobar-ne l'equació cal resoldre el sistema en aquest cas:



$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ x + y + z = 4 \end{array} \right\} \xLeftrightarrow{F1=F3} \left. \begin{array}{l} x + y + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \end{array} \right\} \xLeftrightarrow{z=\lambda} \left. \begin{array}{l} x + y = 4 - \lambda \\ x + 3y = 5 - \lambda \end{array} \right\}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ 5 - \lambda & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{12 - 3\lambda - 5 + \lambda}{2} = \frac{7 - 2\lambda}{2},$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 - \lambda \\ 1 & 5 - \lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{5 - \lambda - 4 + \lambda}{2} = \frac{1}{2}.$$

La solució del sistema són tots els punts de la forma $\left(\frac{7-2\lambda}{2}, \frac{1}{2}, \lambda\right)$ per $\lambda \in \mathbb{R}$. És a dir, la intersecció dels tres plans, en aquest cas, consisteix en la recta d'equació $(x, y, z) = \left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) + \lambda(-1, 0, 1)$.

2.3.

Per a $m = 1$, el sistema té infinites solucions, una de les quals és $(x, y, z) = \left(3, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, precisament la que correspon a $\lambda = \frac{1}{2}$. Per tant, qualsevol nova equació que també tingui aquest punt com a solució, per exemple $x = 3$, i que doni una matriu de coeficients total de rang 3, convertirà el sistema en compatible determinat amb el punt desitjat com a única solució; l'equació proposada ho compleix:

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

Criteris de correcció: (2.1) Compteu 0,25 punts per calcular el determinant i trobar els dos valors crítics, i 0,25 punts per la discussió de cadascun dels tres casos. **(2.2)** Compteu 0,25 punts per cadascuna de les tres interpretacions geomètriques i 0,25 per la resolució del sistema en el cas $m = 1$. **(2.3)** Compteu 0,5 punts per donar l'equació demanada i raonar que és vàlida.



Exercici 3

3.1.

Calculem primer la probabilitat que un seguidor del grup aconseguixi comprar una entrada al web. Considerem els successos:

ES = "Obtenir entrada al sorteig",

W = "Intentar comprar-la al web",

EW = "Aconseguir entrada al web".

A partir de les dades de l'enunciat, tenim que

$$P(ES) = 0,16,$$

$$P(W) = (1 - 0,16) \cdot 6/7 = 0,72,$$

$$P(EW) = P(W) \cdot 0,25 = 0,18.$$

Per tant, en total el $16 + 18 = 34$ per cent dels seguidors d'aquest grup al municipi aconseguixen entrada per al concert. Si el 16% dels seguidors corresponen a 24 persones, el 34% correspondran a:

$$\frac{24}{16} = \frac{x}{34} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{x}{34} \Rightarrow x = 17 \cdot 3 = 51 \text{ persones.}$$

3.2.

Segui noE el succés "No tenir entrada per al concert". Ens demanen $P(W|noE)$. Per la llei de Bayes,

$$P(W|noE) = \frac{P(noE|W)P(W)}{P(noE)}.$$

De l'apartat anterior sabem que la probabilitat de tenir entrada és del 34%, per tant $P(noE) = 1 - 0,34 = 0,66$. Sabem també que $P(W) = 0,72$ i $P(noE|W) = 1 - 0,25 = 0,75$. Per tant,

$$P(W|noE) = \frac{0,75 \cdot 0,72}{0,66} \approx 0,82.$$

3.3. Tenim la funció polinòmica $S(t) = -t^3 + 12t^2 - 30t + 90$, a l'interval $t \in [0, 5]$; òbviament és contínua, per ser polinòmica. L'enunciat ens demana si en algun moment $S(t)$ valdrà 100, és a dir,

$$-t^3 + 12t^2 - 30t + 90 = 100.$$



Proves d'accés a la Universitat 2026, convocatòria ordinària. Criteri específic d'avaluació

Si considerem la nova funció $D(t) = S(t) - 100$, el problema es transforma en saber si $D(t) = 0$ en algun moment $t \in [0,5]$. Com que D també és contínua, i tenim que

$$D(0) = -10 < 0 \quad \text{i} \quad D(5) = 15 > 0,$$

es compleixen les hipòtesis del teorema de Bolzano i, per tant, es pot afirmar que existeix un punt $c \in (0,5)$ tal que $D(c) = 0$. Aproximem-lo amb una dècima de precisió:

$$D(2) = -30 < 0 \Rightarrow \exists c \in (2,5) \text{ tal que } D(c) = 0,$$

$$D(4) = -2 < 0 \Rightarrow \exists c \in (4,5) \text{ tal que } D(c) = 0,$$

$$D(4'5) = 6'85 > 0 \Rightarrow \exists c \in (4,4'5) \text{ tal que } D(c) = 0,$$

$$D(4'2) = 1'592 > 0 \Rightarrow \exists c \in (4,4'2) \text{ tal que } D(c) = 0,$$

$$D(4'1) = -0'201 < 0 \Rightarrow \exists c \in (4'1,4'2) \text{ tal que } D(c) = 0.$$

Així doncs, els llums de la sala s'activaran aproximadament al cap de 4,1 minuts d'haver començat a sonar la cançó més famosa del grup.

Criteris de correcció: (3.1) Compteu 0,5 punts per calcular el percentatge de seguidors que obtenen entrada, i 0,25 punts pel nombre de persones que això representa. (3.2) Compteu 0,25 punts pel planteig del problema i 0,5 pel càlcul de la probabilitat demanada. (3.3) Compteu 0,25 punts pel planteig del problema i per comentar la continuïtat de la funció; 0,5 per la primera aplicació del teorema de Bolzano correctament raonada, i 0,25 punts per l'aproximació fins a una dècima.



Exercici 4

OPCIÓ A.

Anomenem x a la longitud en metres del primer tros de barana, amb el qual es farà el tancat circular; de l'altre tros, de $10 - x$ metres de longitud, se'n farà el tancat quadrat. Com que x ha de ser el perímetre d'una circumferència, el seu radi serà $r = \frac{x}{2\pi}$, i l'àrea d'aquest espai circular delimitat valdrà $A_1 = \pi \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2$. Per altra banda, com que $10 - x$ és el perímetre d'un quadrat, el seu costat serà $c = \frac{10-x}{4}$ i l'àrea d'aquest espai quadrat valdrà $A_2 = \left(\frac{10-x}{4}\right)^2$. Així la funció a minimitzar és

$$A(x) = \pi \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{10-x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{100 - 20x + x^2}{16} = \frac{(4 + \pi)x^2 - 20\pi x + 100\pi}{16\pi}.$$

Derivem i busquem els punts crítics

$$A'(x) = \frac{(8 + 2\pi)x - 20\pi}{16\pi} = 0 \rightarrow x = \frac{20\pi}{8 + 2\pi} \simeq 4,4 \text{ m}.$$

Per assegurar que es tracta d'un mínim, podem fer la segona derivada i comprovar que és positiva:

$$A''(x) = \frac{8 + 2\pi}{16\pi} > 0.$$

Així doncs, per tal de minimitzar la superfície total dels dos espais, l'arquitecte d'aquest poble haurà de fer un tancat circular amb 4,4 m de barana i un tancat quadrat amb els 5,6 m restants. La superfície total dels dos tancats serà de

$$A(4,4) = \frac{(4 + \pi) \cdot 4,4^2 - 20\pi \cdot 4,4 + 100\pi}{16\pi} \simeq 3,5 \text{ m}^2.$$

Criteris de correcció: Compteu 0,25 punts per plantejar el perímetre de la circumferència; 0,25 punts pel perímetre del quadrat, i 0,5 punts per l'expressió de l'àrea total en funció d'una sola variable. Compteu 0,5 punts per la derivada i obtenció del punt crític; 0,5 per comprovar que es tracta d'un mínim, i 0,5 per la resposta final, incloent-hi les dues longituds i el valor de l'àrea mínima.



OPCIÓ B.

4.1.

Comencem trobant els vectors $\overrightarrow{PQ} = (2, -2, 1)$ i $\overrightarrow{PR} = (0, 1, 2)$. El vector normal al pla buscat és

$$\vec{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4i + 2k - i - 4j = (-5, -4, 2).$$

Així doncs el pla buscat té equació de la forma $5x + 4y - 2z + D = 0$. Substituint les coordenades del punt R a l'equació anterior deduïm $D = -7$ i, per tant, l'equació buscada és

$$\pi: 5x + 4y - 2z - 7 = 0.$$

4.2.

i pensem el triangle ΔPQR amb base PQ , aquesta mesura

$$d(P, Q) = \sqrt{(3-1)^2 + (-2-0)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Per altra banda, la recta $\overline{PQ}$ té equació

$$(x, y, z) = (1, 0, -1) + \lambda(2, -2, 1) = (1 + 2\lambda, -2\lambda, -1 + \lambda),$$

i vector director $(2, -2, 1)$. Per tant, el pla perpendicular que passa per R té equació de la forma $2x - 2y + z + D = 0$, amb $2 - 2 + 1 + D = 0 \rightarrow D = -1$. I la projecció de R sobre la recta $\overline{PQ}$ serà la intersecció del pla $2x - 2y + z - 1 = 0$ amb la recta $\overline{PQ}$, és a dir

$$2(1 + 2\lambda) - 2(-2\lambda) + (-1 + \lambda) - 1 = 0 \rightarrow 9\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 0,$$

és el punt $(1, 0, -1)$ (és casualitat que sigui P ; això vol dir que l'angle $\widehat{RPQ}$ és recte).

Així l'àrea del triangle ΔPQR és

$$\begin{aligned} \text{Àrea}(PQR) &= \frac{\text{base} \cdot \text{alçada}}{2} = \frac{d(P, Q) \cdot d(P, R)}{2} = \frac{3 \cdot \sqrt{(1-1)^2 + (1-0)^2 + (1+1)^2}}{2} \\ &= \frac{3\sqrt{5}}{2} u^2. \end{aligned}$$

Alternativament, també podem calcular l'àrea més ràpidament, aprofitant el producte vectorial de l'apartat anterior i la fórmula

$$\frac{1}{2} |\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = \frac{1}{2} \sqrt{(-5)^2 + (-4)^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \sqrt{45} = \frac{3}{2} \sqrt{5} u^2.$$



4.3.

El volum del tetraedre determinat pels punts P, Q, R, S és

$$Volum(PQRS) = \frac{\text{Àrea}(PQR) \cdot \text{alçada}}{3} = \frac{\frac{3\sqrt{5}}{2} \cdot d(S, \pi)}{3}.$$

Com que la distància del punt $S = (x, y, z)$ al pla $\pi: 5x + 4y - 2z - 7 = 0$ és

$$d(S, \pi) = \frac{|5x + 4y - 2z - 7|}{\sqrt{5^2 + 4^2 + (-2)^2}} = \frac{|5x + 4y - 2z - 7|}{\sqrt{45}},$$

el lloc geomètric dels punts S tals que el tetraedre format per P, Q, R, S tingui volum 1 ve donat per

$$\frac{\frac{3\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{|5x + 4y - 2z - 7|}{\sqrt{45}}}{3} = 1,$$

$$5x + 4y - 2z - 7 = \pm 6,$$

és a dir, són dos plans paral·lels al pla π , d'equacions

$$5x + 4y - 2z - 1 = 0, \quad i \quad 5x + 4y - 2z - 13 = 0.$$

Criteris de correcció: (4.1) Compteu 0,75 punts pel càlcul de l'equació correcta del pla. (4.2) Compteu 0,5 punts pel càlcul de la base i l'alçada del triangle, i 0,25 per l'àrea. (4.3) Compteu 0,5 punts pel planteig i desenvolupament del problema; 0,25 per tractar correctament el valor absolut i 0,25 per les equacions dels dos plans finals.