

Convocatoria extraordinaria, suplente 2, de 2025

Resolución de los siete ejercicios, con desarrollo de los apartados obligatorios y optativos.

Ejercicio 1

Parametrizamos las rectas:

$$r : (x, y, z) = (t, 2 - t, k + 2t), \quad s : (x, y, z) = (-2 - u, -3 + 2u, 1 + u).$$

Para que se corten, igualamos las coordenadas. Las dos primeras dan $t = -9$ y $u = 7$; la tercera exige $k - 18 = 8$, por lo que $k = 26$. El punto de intersección es $(-9, 11, 8)$.

Para $k = 0$, tomamos $P = (0, 2, 0) \in r$. Un plano que contiene a r y es paralelo a s tiene como direcciones $\vec{d}_r = (1, -1, 2)$ y $\vec{d}_s = (-1, 2, 1)$. Su normal es

$$\vec{n} = \vec{d}_r \times \vec{d}_s = (-5, -3, 1).$$

Al imponer que pase por P , obtenemos

$$-5x - 3y + z + 6 = 0.$$

Ejercicio 2

La trayectoria cumple $y = \sqrt{x+1}$, así que podemos expresar los puntos de ella como $(y^2 - 1, y)$ con $y \geq 0$. El cuadrado de la distancia al naufrago $(2, 0)$ es

$$D^2(y) = (y^2 - 3)^2 + y^2 = y^4 - 5y^2 + 9.$$

Minimizamos esta función para $y \geq 0$:

$$(D^2)'(y) = 4y^3 - 10y = 2y(2y^2 - 5) = 0.$$

Los candidatos son $y = 0$ y $y = \sqrt{5/2}$. Al evaluar, $D^2(0) = 9$ y $D^2(\sqrt{5/2}) = 11/4$, por lo que el mínimo se alcanza en

$$y = \sqrt{\frac{5}{2}}, \quad x = y^2 - 1 = \frac{3}{2}.$$

El punto de la trayectoria es $(3/2, \sqrt{5/2})$ y la distancia mínima es $\sqrt{11/2}$.

Ejercicio 3

En los dos lados de 0 quitamos el valor absoluto:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{1+x}, & -1 < x \leq 0, \\ \frac{1+x}{1-x}, & 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

La función es continua en 0 y $f(0) = 1$. Sus derivadas laterales son

$$f'_-(0) = -2, \quad f'_+(0) = 2,$$

por lo que no es derivable en 0.

En $(-1, 0)$, $f'(x) = -2/(1+x)^2 < 0$, mientras que en $(0, 1)$, $f'(x) = 2/(1-x)^2 > 0$. Por tanto, decrece en $(-1, 0)$ y crece en $(0, 1)$; alcanza un mínimo absoluto de valor 1 en $x = 0$.

Ejercicio 4

Sea M la matriz del enunciado, con $\det M = -5$.

a) En la matriz pedida, sacamos los factores 3 y 2 de la segunda y tercera fila. Las columnas restantes son la primera, tercera y dos veces la segunda fila de M , tras transponerlas. El intercambio de las filas segunda y tercera cambia el signo del determinante; por tanto,

$$\det = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot (-\det M) = 12 \cdot 5 = 60.$$

b) Sacamos un factor 2 de la tercera columna. La matriz restante se obtiene de M sustituyendo la primera fila por $2F_1 - 3F_3$, operación que multiplica el determinante por 2. Así,

$$\det = 2 \cdot 2 \det M = 4(-5) = \boxed{-20}.$$

Ejercicio 5

Para $A = \begin{pmatrix} a & 3 \\ b & 1 \end{pmatrix}$, calculamos

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + 3b & 3a + 3 \\ b(a + 1) & 3b + 1 \end{pmatrix}.$$

Al igualar con $4I$, la entrada superior derecha da $a = -1$ y la inferior derecha da $b = 1$. Las otras dos entradas quedan satisfechas. Así, $\boxed{a = -1, b = 1}$.

Con esos valores $A^2 = 4I$. La matriz B tiene tres filas y dos columnas, por lo que B^t tiene dos filas y tres columnas, igual que X . De $4X = B^t$ se obtiene

$$X = \frac{1}{4}B^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 6

Las curvas $y = -e^x$ y $y = -e^{-x}$ se cortan cuando $e^x = e^{-x}$, es decir, en $(0, -1)$. En $[-1, 0]$ la primera está por encima de la segunda; en $[0, 1]$ ocurre al contrario. Por eso el área total se separa en dos integrales:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^0 (e^{-x} - e^x) dx + \int_0^1 (e^x - e^{-x}) dx \\ &= (e + e^{-1} - 2) + (e + e^{-1} - 2). \end{aligned}$$

El área total es $\boxed{2 \left(e + \frac{1}{e} - 2 \right)}$.

Ejercicio 7

Sea X el peso, en gramos.

a) Si $X \sim N(200, \sigma)$ y $P(X > 230) = 0.33$, entonces $P(Z \leq z) = 0.67$. La tabla da aproximadamente $z = 0.44$, de modo que

$$\frac{230 - 200}{\sigma} = 0.44 \implies \sigma \approx 68.18 \text{ g.}$$

b) Para $X \sim N(200, 50)$,

$$P(160 < X < 220) = P(-0.8 < Z < 0.4) = 0.6554 - 0.2119 = 0.4435.$$

El porcentaje es $\boxed{44.35\%}$.