

Junio de 2017 · Convocatoria ordinaria

Se resuelven las dos opciones. En cada ejercicio se explican las fórmulas utilizadas y se justifican los resultados.

Opción A

A.1. Sistema de ecuaciones con parámetro

Estudiamos el sistema

$$\begin{cases} -x + ay + 2z = a, \\ 2x + ay - z = 2, \\ ax - y + 2z = a. \end{cases}$$

La matriz de coeficientes y la matriz ampliada son

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a & 2 \\ 2 & a & -1 \\ a & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & a & 2 & a \\ 2 & a & -1 & 2 \\ a & -1 & 2 & a \end{array} \right).$$

Para clasificar el sistema usamos el teorema de Rouché-Frobenius: si el rango de A coincide con el de A^* , el sistema es compatible; si además ese rango es el número de incógnitas, la solución es única; si es menor, hay infinitas soluciones.

Calculamos primero el determinante de A , desarrollando por la primera fila:

$$\begin{aligned} \det A &= (-1) \begin{vmatrix} a & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ a & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & a \\ a & -1 \end{vmatrix} \\ &= -(2a - 1) - a(4 + a) + 2(-2 - a^2) \\ &= -3a^2 - 6a - 3 \\ &= -3(a + 1)^2. \end{aligned}$$

El determinante solo se anula cuando

$$-3(a + 1)^2 = 0 \iff a = -1.$$

Caso $a \neq -1$. Como $\det A \neq 0$, se tiene $\text{rg}(A) = 3$. La matriz ampliada tiene tres filas, así que también $\text{rg}(A^*) = 3$. Por Rouché-Frobenius,

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3 = \text{número de incógnitas}.$$

Por tanto, el sistema es **compatible determinado (SCD)**: tiene una única solución. No hace falta resolverla para clasificarlo.

Caso $a = -1$

La matriz ampliada queda

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{array} \right).$$

Las filas primera y tercera son iguales, por lo que $\text{rg}(A) \leq 2$ y $\text{rg}(A^*) \leq 2$. Para comprobar que ambos rangos son exactamente 2, usamos el menor formado por las dos primeras filas y las columnas de x, y :

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1)(-1) - (-1)(2) = 3 \neq 0.$$

Este menor pertenece tanto a A como a A^* ; así,

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3.$$

Por Rouché-Frobenius, el sistema es **compatible indeterminado (SCI)**: tiene infinitas soluciones y un parámetro libre. Al eliminar una ecuación repetida, las ecuaciones independientes se pueden escribir como

$$x - z = 1, \quad y - z = 0.$$

Tomamos $z = \lambda$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces $x = 1 + \lambda$ e $y = \lambda$, de modo que

$$(x, y, z) = (1 + \lambda, \lambda, \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

a) Solución para $a = 2$. El sistema es

$$-x + 2y + 2z = 2, \quad 2x + 2y - z = 2, \quad 2x - y + 2z = 2.$$

Restamos la tercera ecuación de la segunda:

$$(2x + 2y - z) - (2x - y + 2z) = 0 \implies 3y - 3z = 0 \implies y = z.$$

Restamos la primera ecuación de la tercera:

$$(2x - y + 2z) - (-x + 2y + 2z) = 0 \implies 3x - 3y = 0 \implies x = y.$$

Por tanto, $x = y = z$. Al sustituir en la primera ecuación:

$$-x + 2x + 2x = 2 \implies 3x = 2 \implies x = \frac{2}{3}.$$

La solución pedida es

$$(x, y, z) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right).$$

b) Valores del parámetro para los que el sistema es SCD. La condición obtenida del determinante es $a \neq -1$. En ese caso hay solución única; para $a = -1$ hay infinitas soluciones. Por tanto,

$$\text{El sistema es SCD si y solo si } a \neq -1.$$

c) Soluciones para $a = -1$. El cálculo de rangos anterior da $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3$, por lo que el sistema es SCI. Su solución general es

$$(x, y, z) = (1 + \lambda, \lambda, \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

A.2. Rectas y planos en el espacio

Se da $P = (1, 1, 1)$, el plano

$$\pi: x + y + z - 1 = 0,$$

y la recta r , como intersección de los planos

$$\begin{cases} x + y - z + 1 = 0, \\ x + 2y - z - 1 = 0. \end{cases}$$

Antes de operar, expresamos r en forma paramétrica. Restando la primera ecuación de la segunda:

$$(x + 2y - z - 1) - (x + y - z + 1) = 0 \implies y = 2.$$

Al sustituir $y = 2$ en la primera ecuación obtenemos $x - z = -3$, es decir, $z = x + 3$. Tomamos $x = t$, con $t \in \mathbb{R}$:

$$r: \begin{cases} x = t, \\ y = 2, \\ z = t + 3, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Así, un punto de r es $R_0 = (0, 2, 3)$ y un vector director es $\vec{d} = (1, 0, 1)$.

a) Plano que contiene r y P . Otro vector del plano es

$$\overrightarrow{R_0P} = P - R_0 = (1, -1, -2).$$

Un vector normal al plano es el producto vectorial de los dos vectores contenidos en él:

$$\vec{n} = \vec{d} \times \overrightarrow{R_0P} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (1, 3, -1).$$

La ecuación general de un plano de normal (A, B, C) que pasa por (x_0, y_0, z_0) es $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. Usando R_0 :

$$(x - 0) + 3(y - 2) - (z - 3) = 0.$$

El plano pedido, en forma general, es

$$\sigma_1: x + 3y - z - 3 = 0.$$

b) Recta perpendicular a π que pasa por P , distancia de P a π y punto de intersección. Un vector normal de π es $\vec{n}_\pi = (1, 1, 1)$. Como la dirección de una recta perpendicular al plano es paralela a su normal, la recta que pasa por P , escrita en forma paramétrica, es

$$s: \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 1 + t, \\ z = 1 + t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para un punto $P = (x_P, y_P, z_P)$ y un plano $Ax + By + Cz + D = 0$, la distancia es

$$d(P, \pi) = \frac{|Ax_P + By_P + Cz_P + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Sustituimos $P = (1, 1, 1)$ y la ecuación $x + y + z - 1 = 0$:

$$d(P, \pi) = \frac{|1 + 1 + 1 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{2\sqrt{3}}{3}}.$$

Para hallar el pie de la perpendicular, sustituimos las coordenadas de s en el plano:

$$(1 + t) + (1 + t) + (1 + t) - 1 = 0 \implies 2 + 3t = 0 \implies t = -\frac{2}{3}.$$

Al sustituir ese parámetro en s :

$$s \cap \pi = Q = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

c) Plano que contiene r y es perpendicular a π . Sea $\vec{n}_\sigma$ un normal del plano buscado. Como r está en el plano, $\vec{n}_\sigma$ debe ser perpendicular a su dirección $\vec{d}$. Además, dos planos perpendiculares tienen normales perpendiculares entre sí, así que $\vec{n}_\sigma$ también debe ser perpendicular a $\vec{n}_\pi$. Podemos tomar

$$\vec{n}_\sigma = \vec{d} \times \vec{n}_\pi = (1, 0, 1) \times (1, 1, 1) = (-1, 0, 1).$$

Usamos el punto $R_0 = (0, 2, 3)$ de r y escribimos el plano en forma general:

$$-(x - 0) + (z - 3) = 0.$$

Por tanto,

$$\sigma_2 : -x + z - 3 = 0.$$

A.3. Coste mínimo de los cables

Situamos $P = (x, 0)$ sobre el segmento horizontal ON , con $O = (0, 0)$, $N = (18, 0)$ y $M = (0, 6)$. Como P está entre O y N , la variable cumple

$$0 \leq x \leq 18.$$

Por Pitágoras, la longitud inclinada MP y la longitud horizontal PN son

$$MP = \sqrt{x^2 + 6^2} = \sqrt{x^2 + 36}, \quad PN = 18 - x.$$

El cable MP cuesta 10 euros por metro y el cable PN , 5 euros por metro. El coste total, en euros, es por ello

$$C(x) = 10\sqrt{x^2 + 36} + 5(18 - x), \quad 0 \leq x \leq 18.$$

Para localizar el mínimo derivamos:

$$C'(x) = 10 \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 36}} - 5 = \frac{10x}{\sqrt{x^2 + 36}} - 5.$$

Buscamos los puntos críticos resolviendo $C'(x) = 0$:

$$\frac{10x}{\sqrt{x^2 + 36}} - 5 = 0 \implies 2x = \sqrt{x^2 + 36}.$$

Como $x \geq 0$, ambos lados son no negativos y podemos elevar al cuadrado sin introducir una solución negativa:

$$4x^2 = x^2 + 36 \implies 3x^2 = 36 \implies x = 2\sqrt{3}.$$

Este valor pertenece a $[0, 18]$. Además,

$$C''(x) = \frac{360}{(x^2 + 36)^{3/2}} > 0 \quad (0 \leq x \leq 18),$$

así que $C'(x)$ es creciente. Para comprobar su signo a ambos lados del punto crítico:

$$C'(0) = -5 < 0, \quad C'(6) = \frac{10}{\sqrt{2}} - 5 = 5\sqrt{2} - 5 > 0.$$

La derivada pasa de negativa a positiva en $x = 2\sqrt{3}$; el coste decrece antes y crece después. Por tanto, allí se alcanza el mínimo absoluto en el intervalo:

$$x = 2\sqrt{3} \text{ m} \approx 3,4641 \text{ m.}$$

Sustituimos este valor en la función de coste:

$$\begin{aligned} C(2\sqrt{3}) &= 10\sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 36} + 5(18 - 2\sqrt{3}) \\ &= 10\sqrt{48} + 90 - 10\sqrt{3} \\ &= 40\sqrt{3} + 90 - 10\sqrt{3} \\ &= 90 + 30\sqrt{3} \\ &\approx 141,96 \text{ euros.} \end{aligned}$$

El coste mínimo es, por tanto, $90 + 30\sqrt{3}$ euros, aproximadamente 141,96 euros.

Opción B

B.1. Operaciones con matrices

Se da la matriz

$$C = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Cálculo de C^4 . Primero calculamos $C^2 = C \cdot C$, multiplicando filas por columnas:

$$\begin{aligned} C^2 &= \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 25 - 8 - 8 & -20 + 4 + 8 & 10 - 4 - 2 \\ 10 - 2 - 4 & -8 + 1 + 4 & 4 - 1 - 1 \\ -20 + 8 + 4 & 16 - 4 - 4 & -8 + 4 + 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Al comparar las entradas se obtiene

$$C^2 = 2C - I,$$

donde I es la matriz identidad de orden 3. Ahora elevamos al cuadrado para obtener la potencia solicitada:

$$\begin{aligned}
C^4 &= (C^2)^2 = (2C - I)^2 \\
&= 4C^2 - 4C + I \\
&= 4(2C - I) - 4C + I \\
&= 4C - 3I \\
&= \begin{pmatrix} 20 & -16 & 8 \\ 8 & -4 & 4 \\ -16 & 16 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \boxed{\begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}}.
\end{aligned}$$

b) Determinante de $(3A^4)(4A^2)^{-1}$. La matriz A es de orden 4 y $\det A = -1$. Usamos que, para una matriz 4×4 , $\det(kM) = k^4 \det M$, que $\det(A^n) = (\det A)^n$, que el determinante de un producto es el producto de los determinantes y que $\det(M^{-1}) = 1/\det M$.

Aplicamos primero estas propiedades por separado a los dos factores:

$$\det(3A^4) = 3^4 \det(A^4) = 3^4 (\det A)^4 = 81(-1)^4 = 81,$$

$$\det(4A^2) = 4^4 \det(A^2) = 4^4 (\det A)^2 = 256(-1)^2 = 256.$$

Por tanto, el determinante del producto indicado es

$$\begin{aligned}
\det((3A^4)(4A^2)^{-1}) &= \det(3A^4) \det((4A^2)^{-1}) \\
&= 81 \cdot \frac{1}{\det(4A^2)} \\
&= 81 \cdot \frac{1}{256} \\
&= \boxed{\frac{81}{256}}.
\end{aligned}$$

c) Matriz idempotente e invertible. Si B es invertible y $B^2 = B$, multiplicamos la igualdad por B^{-1} a la izquierda:

$$B^{-1}B^2 = B^{-1}B.$$

Por asociatividad, $B^{-1}B^2 = (B^{-1}B)B = IB = B$, mientras que $B^{-1}B = I$. Así,

$$\boxed{B = I}.$$

B.2. Tetraedro

Sean $O = (0, 0, 0)$, $A = (1, 1, 1)$, $B = (3, 0, 0)$ y $C = (0, 3, 0)$.

a) Plano ABC y altura desde O . Dos vectores contenidos en el plano son

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2, -1, -1), \quad \overrightarrow{AC} = C - A = (-1, 2, -1).$$

Su producto vectorial da un vector normal:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (3, 3, 3).$$

La ecuación general de un plano con normal $(3, 3, 3)$ que pasa por $A = (1, 1, 1)$ es

$$3(x - 1) + 3(y - 1) + 3(z - 1) = 0.$$

Dividiendo entre 3, el plano queda

$$\pi: x + y + z - 3 = 0.$$

La altura que parte de O debe ser perpendicular a π , por lo que lleva dirección paralela a $\vec{n}$. En forma paramétrica:

$$h_0: \begin{cases} x = t, \\ y = t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = t, \end{cases}$$

b) Pie H de la altura. El punto H es la intersección de h_0 con π . Sustituimos $x = y = z = t$ en la ecuación del plano:

$$t + t + t - 3 = 0 \implies 3t = 3 \implies t = 1.$$

Al sustituir en la recta:

$$H = (1, 1, 1).$$

c) Área de ABC y volumen del tetraedro. El área de un triángulo formado por dos vectores adyacentes es la mitad del módulo de su producto vectorial:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{ABC} &= \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\| \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

La altura del tetraedro es la distancia de O al plano ABC . Aplicando la fórmula de distancia punto-plano:

$$h = d(O, \pi) = \frac{|0 + 0 + 0 - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

El volumen de una pirámide es un tercio del área de la base por la altura. Por tanto,

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{1}{3} \mathcal{A}_{ABC} h \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} \\
 &= \boxed{\frac{3}{2}}.
 \end{aligned}$$

B.3. Estudio de una función

Estudiamos

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}.$$

Dominio. El denominador no puede ser cero. Por tanto,

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \boxed{\mathbb{R} \setminus \{0\}}.$$

Para $x \neq 0$, separamos la fracción:

$$f(x) = x + \frac{1}{x}.$$

a) Crecimiento, decrecimiento y extremos relativos. Derivamos en todo el dominio:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}.$$

Los puntos que separan los intervalos son las soluciones de $f'(x) = 0$, es decir, $x = -1$ y $x = 1$, y el punto $x = 0$, donde la función no está definida. Para estudiar el signo probamos un valor dentro de cada intervalo:

Intervalo	Valor de prueba	Signo de f'	Comportamiento
$(-\infty, -1)$	-2	$+$	Creciente
$(-1, 0)$	$-\frac{1}{2}$	$-$	Decreciente
$(0, 1)$	$\frac{1}{2}$	$-$	Decreciente
$(1, +\infty)$	2	$+$	Creciente

Así, la función es creciente en

$$\boxed{(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)}$$

y decreciente en

$$\boxed{(-1, 0) \cup (0, 1)}.$$

En $x = -1$, el signo pasa de $+$ a $-$, por lo que hay un máximo relativo. Su ordenada es

$$f(-1) = -1 - 1 = -2.$$

En $x = 1$, el signo pasa de $-$ a $+$, así que hay un mínimo relativo:

$$f(1) = 1 + 1 = 2.$$

En $x = 0$ la función no existe; es una separación del dominio, no un máximo ni un mínimo. Por tanto, los extremos relativos son **máximo relativo $(-1, -2)$, mínimo relativo $(1, 2)$** .

b) Asíntotas

Comprobamos las verticales, horizontales y oblicuas.

- **Vertical.** Al acercarnos a **0**, el término **$1/x$** domina:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + \frac{1}{x} \right) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x + \frac{1}{x} \right) = -\infty.$$

Por tanto, **$x = 0$** es una asíntota vertical.

- **Horizontal.** Para que **$y = L$** sea horizontal, **$f(x)$** debe tender a un número finito cuando **$x \rightarrow +\infty$** o **$x \rightarrow -\infty$** . Aquí

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

No existe asíntota horizontal.

- **Oblicua.** Calculamos la pendiente y la ordenada al origen de una posible recta **$y = mx + n$** :

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) = 1,$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x + \frac{1}{x} - x \right) = 0.$$

Así, la asíntota oblicua en ambos extremos es

$$\boxed{y = x.}$$

c) Área entre la curva, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$, $x = e$. En $[1, e]$, $x > 0$ y $x + 1/x > 0$; por ello, el área es la integral de **f** entre esos límites.

Desarrollamos primero la integral indefinida:

$$\begin{aligned} \int \left(x + \frac{1}{x} \right) dx &= \int x dx + \int \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{x^2}{2} + \ln|x| + C. \end{aligned}$$

Evaluamos ahora en los extremos del intervalo:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_1^e \left(x + \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + \ln|x| \right]_1^e \\ &= \left(\frac{e^2}{2} + \ln e \right) - \left(\frac{1^2}{2} + \ln 1 \right) \\ &= \frac{e^2}{2} + 1 - \frac{1}{2} \\ &= \boxed{\frac{e^2 + 1}{2}}. \end{aligned}$$

El área encerrada es $\boxed{(e^2 + 1)/2}$ unidades cuadradas.