

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

Septiembre de 2004 · Convocatoria extraordinaria

Resolución razonada de los cuatro problemas de cada ejercicio. En el examen se eligen tres problemas de un ejercicio; aquí se desarrollan todos.

Ejercicio A

Problema 1 · Ecuación matricial

Reordenamos $AX - B = 3X$ para que las incógnitas queden en un único miembro:

$$(A - 3I)X = B, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

El sistema equivalente es $2y - z = -2$, $3x - 3y + z = -1$ y $2x + y = 1$. De la primera, $z = 2 + 2y$; al sustituirlo en la segunda queda $3x - y = -3$. Junto con $2x + y = 1$, obtenemos

$$y = 3x + 3, \quad 2x + (3x + 3) = 1 \implies x = -\frac{2}{5}, \quad y = \frac{9}{5}, \quad z = \frac{28}{5}.$$

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{9}{5} \\ \frac{28}{5} \end{pmatrix}.$$

Problema 2 · Coste mínimo de producción

Sean x e y los días de trabajo de los talleres primero y segundo. Las cantidades producidas deben cubrir el contrato, mientras que el coste $C = 720x + 900y$ se quiere minimizar:

$$4x + 2y \geq 12, \quad 2x + 2y \geq 8, \quad 4x + 12y \geq 24, \quad x, y \geq 0.$$

Dividiendo las tres primeras desigualdades por sus factores comunes:

$$2x + y \geq 6, \quad x + y \geq 4, \quad x + 3y \geq 6.$$

La región queda por encima de las tres rectas. Sus vértices son $(0, 6)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$ y $(6, 0)$; el segundo y el tercero se obtienen intersectando, respectivamente, las dos primeras restricciones y las dos últimas. Comparamos el coste:

(x, y)	$(0, 6)$	$(2, 2)$	$(3, 1)$	$(6, 0)$
C (€)	5400	3240	3060	4320

El coste mínimo corresponde a $(3, 1)$. Se fabrican $4(3) + 2(1) = 14$ archivadores A, $2(3) + 2(1) = 8$ B y $4(3) + 12(1) = 24$ C.

Primer taller: 3 días; segundo: 1 día; coste mínimo: 3060 €. Excedente: 2 archivadores A.

Problema 3 · Número máximo de clientes

La función $C(t) = 60t - 10t^2$ es una parábola cóncava hacia abajo. El tiempo es $0 \leq t \leq 6$, pues $C(t) = 0$ en $t = 0$ y $t = 6$. El máximo se alcanza en el vértice; también lo hallamos derivando:

$$C'(t) = 60 - 20t = 0 \implies t = 3, \quad C(3) = 180 - 90 = 90.$$

Para que haya entre 50 y 80 clientes resolvemos $50 \leq C(t) \leq 80$ dentro del intervalo de apertura:

$$50 \leq 10t(6 - t) \iff (t - 1)(t - 5) \leq 0 \iff 1 \leq t \leq 5,$$

$$10t(6 - t) \leq 80 \iff (t - 2)(t - 4) \geq 0 \iff t \leq 2 \text{ o } t \geq 4.$$

La intersección es $t \in [1, 2] \cup [4, 5]$. Como el restaurante abre a las 20:00, estos intervalos corresponden a las 21:00–22:00 y a las 00:00–01:00.

Máximo: 90 clientes a las 23:00; hay entre 50 y 80 clientes de 21:00 a 22:00 y de 00:00 a 01:00.

Problema 4 · Encuesta sobre ordenadores

Sean L el suceso «haber recibido un curso de LINUX» y O el suceso «tener ordenador en casa». Del enunciado conocemos $P(L) = 0,40$, $P(O | L) = 0,20$ y $P(O \cap \bar{L}) = 0,10$. La probabilidad conjunta del apartado a) es

$$P(O \cap L) = P(L)P(O | L) = 0,40 \cdot 0,20 = 0,08.$$

Los sucesos $O \cap L$ y $O \cap \bar{L}$ son incompatibles y juntos forman O , luego

$$P(O) = 0,08 + 0,10 = 0,18.$$

Para invertir la condición aplicamos Bayes:

$$P(L | O) = \frac{P(L \cap O)}{P(O)} = \frac{0,08}{0,18} = \frac{4}{9}.$$

$$P(O \cap L) = 0,08, \quad P(O) = 0,18, \quad P(L | O) = \frac{4}{9}.$$

Ejercicio B

Problema 1 · Reparto del regalo

Sean m y M las aportaciones del hermano menor y del mayor; el padre aporta $3(m + M)$. La suma total y la razón entre las aportaciones de los hermanos dan

$$m + M + 3(m + M) = 100, \quad \frac{M}{m} = \frac{3}{2}.$$

Así, los hijos pagan juntos 25 €. Si $m = 2k$ y $M = 3k$, entonces $5k = 25$, de donde $k = 5$.

Padre: 75 €; hermano menor: 10 €; hermano mayor: 15 €.
--

Problema 2 · Máximo y mínimo de una función lineal

La región viene dada por $x + y \geq 6$, $2x + y \leq 15$, $3 \leq x \leq 6$ y $2 \leq y \leq 5$. Como $z = 3x + 2y$ es lineal, sus extremos se alcanzan en los vértices. Al intersectar las fronteras y conservar los puntos que cumplen todas las desigualdades, obtenemos $(3, 3)$, $(4, 2)$, $(3, 5)$, $(5, 5)$, $(6, 3)$ y $(6, 2)$. Evaluamos:

(x, y)	$(3, 3)$	$(4, 2)$	$(3, 5)$	$(5, 5)$	$(6, 3)$	$(6, 2)$
$z = 3x + 2y$	15	16	19	25	24	22

$z_{\min} = 15$ en $(3, 3)$, $z_{\max} = 25$ en $(5, 5)$.

Problema 3 · Dimensiones de un cartel

Sean x e y las dimensiones, en centímetros, del rectángulo impreso. Su área fija impone $xy = 18$, de modo que $y = 18/x$, con $x > 0$. Al añadir los márgenes, el cartel mide $x + 2$ de ancho y $y + 4$ de alto; queremos minimizar su área:

$$A(x) = (x + 2) \left(\frac{18}{x} + 4 \right) = 26 + 4x + \frac{36}{x}, \quad x > 0.$$

Derivamos y buscamos los puntos críticos:

$$A'(x) = 4 - \frac{36}{x^2} = 0 \implies x^2 = 9 \implies x = 3,$$

porque x representa una longitud positiva. Además, $A''(x) = 72/x^3 > 0$ para $x > 0$, por lo que este punto es un mínimo. Así, $y = 18/3 = 6$.

Texto impreso: 3 cm $\times$ 6 cm; cartel: 5 cm $\times$ 10 cm.

Problema 4 · Probabilidad de ser mujer rubia

Si hay el doble de mujeres que de hombres, $P(M) = \frac{2}{3}$ y $P(H) = \frac{1}{3}$. Sean R el suceso «ser rubio/a». La probabilidad total de ser rubia es

$$P(R) = P(M)P(R | M) + P(H)P(R | H) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{5}.$$

Con Bayes calculamos la probabilidad de que una persona rubia sea mujer:

$$P(M | R) = \frac{P(M)P(R | M)}{P(R)} = \frac{(2/3)(1/4)}{1/5} = \frac{5}{6}.$$

La probabilidad de elegir un hombre que no sea rubio es la probabilidad conjunta

$$P(H \cap \bar{R}) = P(H)P(\bar{R} | H) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{10} \right) = \frac{3}{10}.$$

$$P(M | R) = \frac{5}{6}, \quad P(H \cap \bar{R}) = \frac{3}{10}.$$