

El examen ofrece dos opciones; se desarrollan ambas para repasar todos sus ejercicios.

Opción A - Ejercicio 1

La función está definida a trozos y debe ser derivable en $x = 1$. Por tanto, primero igualamos los valores de las dos ramas en ese punto (continuidad) y después sus derivadas:

$$f(1^-) = 1 + \frac{a}{1-2} = 1 - a, \quad f(1) = a + \frac{b}{\sqrt{1}} = a + b,$$

de modo que $1 - a = a + b$. Las derivadas de las ramas son

$$\left(1 + \frac{a}{x-2}\right)' = -\frac{a}{(x-2)^2}, \quad \left(a + \frac{b}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{b}{2x^{3/2}}.$$

Al evaluarlas en $x = 1$, la igualdad de derivadas da $-a = -b/2$, es decir, $b = 2a$. Sustituyendo en la condición de continuidad, $1 - a = 3a$, y así

$$a = \frac{1}{4}, \quad b = \frac{1}{2}.$$

Opción A - Ejercicio 2

Buscamos una primitiva de $(1 - x^2)e^{-x}$. Por la regla del producto, si probamos una primitiva de la forma $e^{-x}P(x)$, su derivada será $e^{-x}(P' - P)$. Tomando $P(x) = (x+1)^2$, se tiene $P'(x) - P(x) = 1 - x^2$, por lo que

$$F(x) = e^{-x}(x+1)^2 + C.$$

La gráfica debe pasar por $(-1, 0)$, así que $F(-1) = 0$. Como el término $e^{-x}(x+1)^2$ vale cero en $x = -1$, resulta $C = 0$:

$$F(x) = e^{-x}(x+1)^2.$$

Opción A - Ejercicio 3

Sean L , C y E los precios del libro, la calculadora y el estuche. El gasto total y la relación entre precios dan

$$L + C + E = 57, \quad L = 2(C + E).$$

De aquí, $3(C + E) = 57$, luego $C + E = 19$ y $L = 38$. El libro queda determinado de forma única; la calculadora no, porque por ahora solo conocemos la suma de los precios de la calculadora y el estuche. Por ejemplo, $(C, E) = (t, 19 - t)$ mantiene el mismo total.

Con los descuentos, se paga el 50% del libro, el 80% de la calculadora y el 75% del estuche. Usamos además $C + E = 19$:

$$0.5(38) + 0.8C + 0.75E = 34 \implies 16C + 15E = 300.$$

Restando $15(C + E) = 285$ se obtiene $C = 15$, y entonces $E = 4$. Por tanto, los precios originales son

$$L = 38 \text{ €}, \quad C = 15 \text{ €}, \quad E = 4 \text{ €}.$$

Opción A - Ejercicio 4

Igualamos las tres razones a un parámetro t para escribir la recta en forma paramétrica:

$$r: \quad x = -3 + 2t, \quad y = -5 + 3t, \quad z = -4 + 3t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Un punto de la recta equidista del origen O y de $A = (3, 2, 1)$ cuando sus distancias a ambos son iguales. Igualando los cuadrados de las distancias evitamos las raíces:

$$\|P\|^2 = \|P - A\|^2 \iff 2P \cdot A = \|A\|^2 = 14.$$

Para el punto $P(t) = (-3 + 2t, -5 + 3t, -4 + 3t)$,

$$P(t) \cdot A = 3(-3 + 2t) + 2(-5 + 3t) + (-4 + 3t) = -23 + 15t.$$

Entonces $2(-23 + 15t) = 14$, de donde $t = 2$. El punto buscado es

$$P = (1, 1, 2).$$

Opción B - Ejercicio 1

Sean a y b los catetos del triángulo rectángulo. La hipotenusa fija la relación $a^2 + b^2 = 10^2 = 100$, y el área es $\mathcal{A} = ab/2$. Usamos

$$a^2 + b^2 \geq 2ab,$$

que se deduce de $(a - b)^2 \geq 0$. Así, $ab \leq 50$ y $\mathcal{A} \leq 25$. La igualdad se alcanza cuando $a = b$, por lo que el triángulo de área máxima es isósceles rectángulo. Sus catetos valen

$$a = b = \sqrt{\frac{100}{2}} = 5\sqrt{2}, \quad \boxed{\mathcal{A}_{\max} = 25 \text{ unidades}^2}.$$

Opción B - Ejercicio 2

Los puntos de corte cumplen $x^2/4 = 2\sqrt{x}$, con $x \geq 0$. Si $x = 0$, ambas funciones valen cero. Para $x > 0$ podemos dividir por $\sqrt{x}$:

$$\frac{x^2}{4} = 2\sqrt{x} \iff x^{3/2} = 8 \implies x = 4.$$

Los puntos son $(0, 0)$ y $(4, 4)$. Entre ellos, $g(x) = 2\sqrt{x}$ queda por encima de $f(x) = x^2/4$ (por ejemplo, en $x = 1$), así que el recinto tiene área

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^4 \left(2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4} \right) dx \\ &= \left[\frac{4}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{12} \right]_0^4 = \frac{32}{3} - \frac{16}{3} = \boxed{\frac{16}{3}}. \end{aligned}$$

Opción B - Ejercicio 3

La matriz de coeficientes y la ampliada son

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 2 & k & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_k^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 2 & k & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & k \end{array} \right).$$

Su determinante es $4(k - 1)$. Si $k \neq 1$, ambos rangos son 3, por lo que Rouché-Frobenius clasifica el sistema como compatible determinado.

Para $k = 1$, el determinante se anula. En este caso el menor formado por las dos primeras filas y columnas x, y vale $-1 \neq 0$, luego $\text{rg}(A_1) = 2$. Además, la familia

$$(x, y, z) = (t, 1 - 2t, t), \quad t \in \mathbb{R},$$

satisface las tres ecuaciones; por tanto $\text{rg}(A_1^*) = 2$ también. Como ambos rangos coinciden y son menores que el número de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado. En resumen,

$$\begin{cases} k \neq 1 : & \text{SCD,} \\ k = 1 : & \text{SCI, con } (x, y, z) = (t, 1 - 2t, t). \end{cases}$$

Para $k = -1$, el determinante es distinto de cero, así que hay una única solución. Al resolver las ecuaciones se obtiene

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2} \right).$$

Opción B - Ejercicio 4

La recta es la intersección de los dos planos dados. De $y + 2z = 8$ se obtiene $y = 8 - 2z$; sustituyendo en $2x - y = 4$, queda $x = 6 - z$. Tomando $z = t$, su forma paramétrica es

$$r: \quad x = 6 - t, \quad y = 8 - 2t, \quad z = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Un vector director es $\vec{v} = (-1, -2, 1)$. Un plano perpendicular a la recta tiene un vector normal paralelo a $\vec{v}$; usando el normal $\vec{n} = (1, 2, -1)$ y el punto $P = (1, 0, 2)$,

$$\pi: x + 2y - z + 1 = 0.$$

Para reflejar P respecto de r , hallamos primero el pie H de la perpendicular desde P a la recta. La recta pasa por $R_0 = (6, 8, 0)$ y tiene director $\vec{v}$, de modo que $H = R_0 + s\vec{v}$. La condición $(P - H) \cdot \vec{v} = 0$ da la proyección

$$s = \frac{(P - R_0) \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} = \frac{(-5, -8, 2) \cdot (-1, -2, 1)}{6} = \frac{23}{6}.$$

Por ello,

$$H = \left(\frac{13}{6}, \frac{1}{3}, \frac{23}{6} \right).$$

El punto simétrico P' cumple que H es el punto medio de PP' , así que $P' = 2H - P$:

$$P' = \left(\frac{10}{3}, \frac{2}{3}, \frac{17}{3} \right).$$