

CATALUÑA · PAU 2021 · ORDINARIA

Matemáticas CCSS

12 ejercicios

Instrucciones del examen

Responded a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explicad siempre qué queréis hacer y por qué. Cada cuestión vale 2,5 puntos. Podéis utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que puedan almacenar datos o que puedan transmitir o recibir información. Podéis utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder alguna cuestión si necesitáis más espacio. En este último caso, tenéis que indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

Ejercicio 1

2,5 puntos

Una fábrica estima que el beneficio mensual, en miles de euros, por cada tonelada de confeti vendida viene dado por la función $f(x) = \frac{-0,2x^2 + 5x - 20}{x}$, donde x representa el número de toneladas de confeti vendidas.

a) 1,25 puntos

Determinad en qué intervalo de valores debe encontrarse la variable x para que la fábrica no tenga pérdidas.

b) 1,25 puntos

Calculad la cantidad de toneladas de confeti que proporciona el beneficio máximo y decid cuál es este beneficio.

Ejercicio 2

2,5 puntos

Considerad la función $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

a) 1,25 puntos

Encontrad la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

b) 1,25 puntos

Estudiad en qué intervalos la función $f(x)$ es creciente y en cuáles es decreciente. Indicad también sus extremos relativos y decid si son máximos o mínimos.

Ejercicio 3

2,5 puntos

En una pastelería quieren preparar cajitas de panellets para obsequiar a los mejores clientes durante la semana de la Castañada. En total, disponen de 120 panellets de piñones y de 150 panellets de coco. Quieren preparar cajitas de dos tipos: las del primer tipo contendrán 3 panellets de piñones y 2 de coco, y las del segundo tipo contendrán 4 panellets de piñones y 6 de coco. La idea de la pastelería es preparar el número máximo de cajitas posible con los panellets de que disponen, teniendo en cuenta que, como mínimo, tienen que preparar 9 cajitas de cada tipo.

a) 1,25 puntos

Determinad la función objetivo y las restricciones. Dibujad la región factible.

b) 1,25 puntos

Determinad cuántas cajitas hay que preparar de cada tipo para hacer el máximo número de obsequios posible. Indicad si, en este caso, se utilizarán todos los panellets disponibles y, si no es así, cuántos sobrarán de cada tipo.

Ejercicio 4

2,5 puntos

Para vender un exceso de producción de 100 bañadores y 200 pares de chancas, una tienda de ropa de playa prepara dos promociones: la oferta azul y la oferta amarilla. La oferta azul consiste en un lote con tres pares de chancas y un bañador por 50 €, y la oferta amarilla, en un lote con un par de chancas y dos bañadores por 30 €. Para cumplir los propósitos de la tienda, sería necesario que el número de lotes vendidos de la oferta azul fuera la mitad o más que el número de lotes vendidos de la oferta amarilla.

a) 1,25 puntos

Determinad la función objetivo y las restricciones, y dibujad la región de las posibles opciones de venta que tiene la tienda.

b) 1,25 puntos

¿Cuántos lotes de cada tipo se tendrán que vender para optimizar los ingresos? ¿Cuáles serán estos ingresos?

Ejercicio 5

2,5 puntos

En una fiesta familiar se han reunido 20 personas. Si contamos el total de hombres y mujeres juntos, observamos que hay el triple que de niños. Además, sabemos que, si hubiera asistido una mujer más, el número de mujeres habría sido igual que el número de hombres.

a) 0,75 puntos

Plantead un sistema de ecuaciones para averiguar cuántos hombres, cuántas mujeres y cuántos niños asistieron a la fiesta.

b) 1,75 puntos

Resolved el sistema del apartado anterior e interpretad el resultado.

Ejercicio 6

2,5 puntos

Una empresa de productos lácteos ingresó el año pasado un total de 1.800.000 € por las ventas de quesos. Las exportaciones a la Unión Europea aportaron tantos ingresos como las ventas en el ámbito estatal y las exportaciones a países extracomunitarios juntas. Este año la empresa ha ingresado 1.950.000 € y sabemos que las ventas estatales han disminuido un 5 %, las exportaciones a la Unión Europea han aumentado un 15 % y las exportaciones a países extracomunitarios han aumentado un 10 %. Determinad las cantidades que ingresó por cada concepto (ventas en el ámbito estatal, exportaciones a la Unión Europea y exportaciones a países extracomunitarios) el año pasado, y también las cantidades que ha ingresado este año.

Ejercicio 7

2,5 puntos

Un granjero quiere construir un corral rectangular para sus conejos. Sabemos que solo dispone de 40 m lineales de valla metálica.

a) 1,25 puntos

Llamamos x a la anchura del corral e y a su longitud. Escribid la función que permite calcular el área del corral teniendo en cuenta solo la anchura x .

b) 1,25 puntos

Calculad en qué punto alcanza su máximo la función que habéis encontrado en el apartado anterior. Deducid cuál debe ser la anchura x y cuál la longitud y para que el corral tenga el área máxima. ¿Cuál será esta área máxima?

Ejercicio 8

2,5 puntos

Supongamos que la temperatura del agua del mar en una zona concreta viene dada por la función $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 4}$, donde x representa la profundidad en metros negativos (por ejemplo, $f(-5)$ representa el valor de la temperatura del agua en grados Celsius a 5 metros de profundidad).

a) 1,25 puntos

¿Cuál es la temperatura del agua en la superficie? ¿A qué profundidades la temperatura es de cero grados? ¿Hacia qué valor tiende la temperatura cuando bajamos a mucha profundidad?

b) 1,25 puntos

Calculad a qué profundidad la temperatura es más baja y cuál es el valor de esta temperatura mínima.

Ejercicio 9

2,5 puntos

Considerad la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) 1,25 puntos

Encontrad la expresión general de A^n . Demostrad que la inversa de A^n es $\begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) 1,25 puntos

Encontrad la matriz X que satisface la ecuación matricial $A^{10} \cdot X - A^{20} = A$.

Ejercicio 10

2,5 puntos

Hacemos dos pruebas de consumo de combustible a un vehículo: en la primera, el vehículo recorre 200 km por carretera y 100 km por ciudad, y consume un total de 17 litros, mientras que en la segunda recorre 300 km por carretera y 50 km por ciudad, y consume 17,5 litros. Suponiendo que los consumos medios por carretera y por ciudad son siempre constantes:

a) 1,25 puntos

¿Cuál es el consumo medio por 100 km en cada una de las dos pruebas?

b) 1,25 puntos

¿Cuántos litros consumirá el mismo vehículo si en una tercera prueba recorre 400 km por carretera y 150 km por ciudad?

Ejercicio 11

2,5 puntos

Considerad la función real de variable real $f(x) = 4x^3 + ax^2 - 2$.

a) 1,25 puntos

Determinad el valor del parámetro real a para que la función tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = -1$.

b) 1,25 puntos

Calculad los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ cuando $a = 12$. Indicad también los puntos en los que hay extremos relativos y clasifícadlos.

Ejercicio 12

2,5 puntos

Considerad la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$, donde a es un número real.

a) 1,25 puntos

Calculad A^2 , A^3 y A^4 .

b) 1,25 puntos

Deducid cuánto valdrá la matriz A^{100} .