Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II · PAU

Curso 2009--2010 · Examen v2

Se desarrollan ambas opciones completas, con los cálculos y las representaciones necesarias.

Opción A

Ejercicio 1 · Programación lineal: lotes de frutos secos

Sean x e y los lotes de tipo A y B. Las cantidades disponibles de avellanas, nueces y almendras imponen, respectivamente,

$$2x + 3y \le 400, \qquad 2x + y \le 300, \qquad x + 4y \le 400, \qquad x, y \ge 0.$$

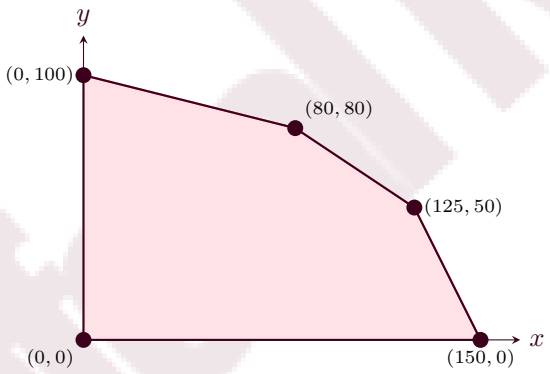
Queremos maximizar el ingreso $I(x, y) = 20x + 40y$. Para ello hallamos los vértices factibles, pues una función lineal alcanza sus extremos en los vértices del recinto.

$$2x + 3y = 400, \quad 2x + y = 300 \Longrightarrow (x, y) = (125, 50),$$
$$2x + 3y = 400, \quad x + 4y = 400 \Longrightarrow (x, y) = (80, 80).$$

Las intersecciones factibles con los ejes son $(150, 0)$ y $(0, 100)$, además del origen. La intersección de $2x + y = 300$ con $x + 4y = 400$ es $(\frac{800}{3}, \frac{100}{3})$, pero no es factible porque $2x + 3y = \frac{1900}{3} > 400$. Así, los vértices son $(0, 0), (150, 0), (125, 50), (80, 80), (0, 100)$.

(x, y)	$(0,0)$	$(150,0)$	$(125,50)$	$(80,80)$	$(0,100)$
$I(x, y)$	0	3000	4500	4800	4000

El máximo se alcanza en $(80, 80)$.



80 lotes A y 80 lotes B; $\qquad I_{\max} = 4800$ €.

Ejercicio 2 · Continuidad, derivabilidad y recta tangente

La función está definida por tramos:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2}, & x \le 0, \\ x^3 - 4x^2, & 0 < x \le 4, \\ 1 - \dfrac{4}{x}, & x > 4. \end{cases}$$

Cada expresión es continua en su intervalo. Solo comprobamos las uniones. En $x = 0$, el valor y los límites laterales son cero:

$$f(0) = 0, \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 = \lim_{x \to 0^+} f(x).$$

En $x = 4$, el valor del tramo central coincide con el límite del último tramo:

$$f(4) = 4^3 - 4 \cdot 4^2 = 0, \qquad \lim_{x \to 4^+} \left(1 - \frac{4}{x}\right) = 0.$$

La función es continua en ambos puntos. Para estudiar la derivabilidad comparamos las derivadas laterales. En $x = 0$, son 0 y $3(0)^2 - 8(0) = 0$, de modo que es derivable. En $x = 4$,

$$f'_-(4) = 3(4)^2 - 8(4) = 16, \qquad f'_+(4) = \frac{4}{4^2} = \frac{1}{4}.$$

Como no coinciden, no es derivable en $x = 4$.

La abscisa $x = 2$ pertenece al tramo central. Allí $f(2) = 8 - 16 = -8$ y $f'(2) = 12 - 16 = -4$. La recta tangente en $(a, f(a))$ tiene ecuación $y - f(a) = f'(a)(x - a)$; por tanto,

$$y + 8 = -4(x - 2) \Longrightarrow y = -4x.$$

$$\boxed{f \text{ es continua en } \mathbb{R}, \text{ derivable salvo en } x = 4; \qquad y_{\text{tan}} = -4x.}$$

Ejercicio 3 · Probabilidad condicionada

Sean V «ser varón», M «ser mujer» y A «aprobar». Se tiene $P(V) = 0{,}41$, $P(M) = 0{,}59$, $P(A \mid V) = 0{,}70$ y $P(A \mid M) = 0{,}60$. La probabilidad de cada combinación se obtiene multiplicando las probabilidades de sus dos sucesos.

$$P(V \cap A) = 0{,}41 \cdot 0{,}70 = 0{,}287, \quad P(M \cap A) = 0{,}59 \cdot 0{,}60 = 0{,}354.$$

Por la probabilidad total, $P(A) = 0{,}287 + 0{,}354 = 0{,}641$; análogamente, $P(A^c) = 0{,}359$ y $P(M \cap A^c) = 0{,}59 \cdot 0{,}40 = 0{,}236$.

a) $$P(M \mid A) = \frac{P(M \cap A)}{P(A)} = \frac{0{,}354}{0{,}641} = \frac{354}{641} \approx 0{,}5523,$$

b) $$P(M \mid A^c) = \frac{P(M \cap A^c)}{P(A^c)} = \frac{0{,}236}{0{,}359} = \frac{236}{359} \approx 0{,}6574.$$

Entre quienes aprueban, las mujeres tienen probabilidad conjunta 0,354 frente a 0,287 de los varones; entre quienes suspenden, 0,236 frente a 0,123. Por tanto, tanto Ana como Benito tienen razón.

$$\boxed{P(M \mid A) = \frac{354}{641}; \quad P(M \mid A^c) = \frac{236}{359}; \quad \text{ambos tienen razón.}}$$

Ejercicio 4 · Intervalo para una proporción

En la primera muestra, $n = 500$ y $\hat{p} = 200/500 = 0{,}4$, de modo que $\hat{q} = 0{,}6$. Para el 97% de confianza, $z_{0{,}985} \approx 2{,}1701$. Usamos el intervalo $\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{p}\hat{q}/n}$:

$$E = 2{,}1701\sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{500}} \approx 0{,}04754, \qquad IC_{97\%}(p) \approx (0{,}35246,\ 0{,}44754).$$

En la segunda muestra, $\hat{p} = 0{,}2$, $\hat{q} = 0{,}8$, confianza del 99% y error estrictamente menor que 0,05. Despejamos el tamaño muestral en la expresión del error, con $z_{0{,}995} \approx 2{,}5758$:

$$E = z_{0{,}995}\sqrt{\frac{0{,}2 \cdot 0{,}8}{n}} < 0{,}05 \quad \Longrightarrow \quad n > \frac{2{,}5758^2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}{0{,}05^2} \approx 424{,}36.$$

Como el error debe ser menor que 0,05, tomamos el entero siguiente.

$$\boxed{IC_{97\%}(p) \approx (0{,}3525,\ 0{,}4475); \qquad n_{\text{min}} = 425.}$$

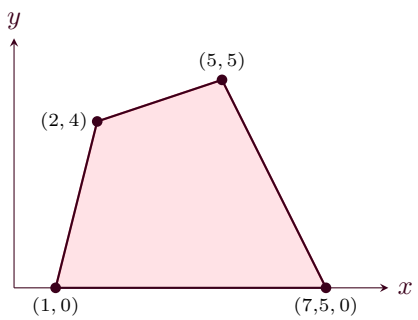
Opción B

Ejercicio 1 · Programación lineal

El recinto se define por $4x - y \geq 4$, $2x + y \leq 15$, $3y - x \leq 10$ e $y \geq 0$. De la primera desigualdad y $y \geq 0$ se deduce $x \geq 1$. Las intersecciones que delimitan la región factible son

$$(1, 0), \qquad (2, 4), \qquad (5, 5), \qquad \left(\frac{15}{2}, 0\right).$$

En efecto, $(2, 4)$ satisface $4x - y = 4$ y $3y - x = 10$; $(5, 5)$ satisface $2x + y = 15$ y $3y - x = 10$; y $(15/2, 0)$ se obtiene al cortar $2x + y = 15$ con $y = 0$. El cruce de las otras dos rectas no cumple todas las restricciones.



Una función lineal alcanza el máximo y el mínimo en vértices. Evaluamos $F(x,y)=4x-7y$:

(x,y)	$(1,0)$	$(2,4)$	$(5,5)$	$(\frac{15}{2},0)$
$F(x,y)$	4	-20	-15	30

El menor valor es -20 y el mayor es 30. Al ser el recinto convexo y F continua, toma todos los valores intermedios entre ambos.

$$\boxed{-20 \le F(x,y) \le 30.}$$

Ejercicio 2 · Vaciado de un depósito

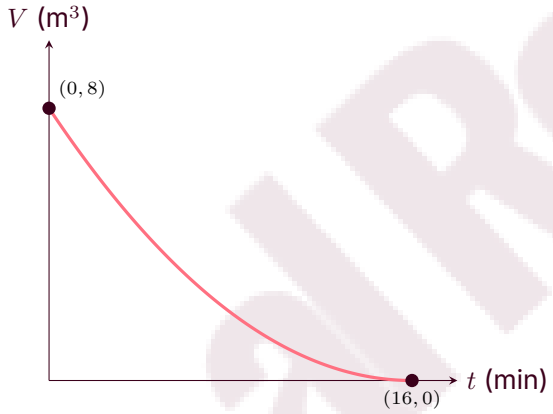
La función volumen es $V(t)=8-t+t^2/32$, con tiempo $t \ge 0$. Al inicio,

$$V(0)=8 \text{ m}^3,$$

que es la capacidad del depósito. Se vacía cuando $V(t)=0$:

$$8-t+\frac{t^2}{32}=0 \iff (t-16)^2=0 \implies t=16 \text{ min}.$$

Durante el vaciado, $0 \le t \le 16$. La parábola puede escribirse $V(t)=(t-16)^2/32$; su gráfica en ese intervalo desciende desde 8 hasta 0.



La derivada representa la variación instantánea del volumen por minuto:

$$V'(t)=-1+\frac{t}{16}, \qquad V'(8)=-1+\frac{8}{16}=-\frac{1}{2} \text{ m}^3/\text{min}.$$

En el minuto 8 el volumen disminuye a razón de $0{,}5$ m^3 por minuto.

$$\boxed{V(0)=8 \text{ m}^3; \qquad t_{\text{vacío}}=16 \text{ min}; \qquad V'(8)=-0{,}5 \text{ m}^3/\text{min}.}$$

Ejercicio 3 · Lanzamiento de dos dados

Cada resultado es un par ordenado (resultado del primer dado, resultado del segundo). Hay $6 \cdot 6 = 36$ resultados equiprobables. Sea A «la mayor puntuación es menor que 4»: ambos dados deben mostrar 1, 2 o 3, por lo que hay $3 \cdot 3 = 9$ casos y $P(A)=9/36=1/4$. Sea B «la primera puntuación es impar»: hay $3 \cdot 6 = 18$ casos, así que $P(B)=1/2$. Para que ocurran ambos, el primer dado puede ser 1 o 3 y el segundo 1, 2 o 3; hay $2 \cdot 3 = 6$ resultados:

$$P(A \cap B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}.$$

Serían independientes si $P(A \cap B)=P(A)P(B)$, pero $1/6 \neq (1/4)(1/2)=1/8$.

$$\boxed{|\Omega|=36; \quad P(A)=\frac{1}{4}; \quad P(B)=\frac{1}{2}; \quad P(A \cap B)=\frac{1}{6}; \quad A, B \text{ no son independientes.}}$$

Ejercicio 4 · Intervalo de confianza para una media

La población es normal y se conoce $\sigma = 0{,}2$ s. Para una muestra de tamaño 25, $\bar{x} = 0{,}3$ s y el error del intervalo es $E = z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$. Con confianza del 94%, $z_{0{,}97} \approx 1{,}8808$:

$$E = 1{,}8808\frac{0{,}2}{\sqrt{25}} \approx 0{,}07523 \text{ s},$$

$$IC_{94\%}(\mu) = 0{,}3 \pm 0{,}07523 \approx (0{,}2248,\ 0{,}3752)\ \text{s}.$$

Para un 90% de confianza, $z_{0{,}95} \approx 1{,}6449$. Exigimos un error menor que 0,05 s:

$$1{,}6449\frac{0{,}2}{\sqrt{n}} < 0{,}05 \quad \Longrightarrow \quad n > \left(\frac{1{,}6449 \cdot 0{,}2}{0{,}05}\right)^2 \approx 43{,}29.$$

El primer entero que satisface la desigualdad estricta es 44.

$$\boxed{IC_{94\%}(\mu) \approx (0{,}2248,\ 0{,}3752)\ \text{s}; \qquad n_{\text{min}} = 44.}$$

tuProfealRescate