

Resolución razonada de los cuatro problemas de cada ejercicio. El examen permite elegir tres problemas de uno de los ejercicios; aquí se desarrollan todos.

Ejercicio A

Problema 1 · Ecuación matricial

Desarrollamos el producto fila a fila y sumamos el vector (x, y, z) para obtener tres ecuaciones escalares:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 2y = -10, \\ -2x + 2y = 6, \\ y + z = 3. \end{cases}$$

Dividiendo las dos primeras ecuaciones entre 2 obtenemos $2x - y = -5$ y $-x + y = 3$. De la segunda, $y = x + 3$; al sustituirlo en la primera,

$$2x - (x + 3) = -5 \Rightarrow x = -2, \quad y = 1, \quad z = 3 - y = 2.$$

Comprobación en la igualdad matricial: el primer miembro vale $(-10, 6, 3)^T$, como exige el segundo miembro.

$$x = -2, \quad y = 1, \quad z = 2.$$

Problema 2 · Producción de lámparas

Sean x e y las lámparas A y B fabricadas al mes. El beneficio es $B = 15x + 10y$. Las horas manuales y de máquina limitan la producción, respectivamente, a

$$20x + 30y \leq 6000, \quad 20x + 10y \leq 4800,$$

que, al dividir entre 10, equivalen a $2x + 3y \leq 600$ y $2x + y \leq 480$. Además, $x, y \geq 0$. Como el beneficio es lineal, su máximo se encuentra en un vértice de la región factible. Los vértices son $(0, 0)$, $(240, 0)$, $(0, 200)$ y la intersección de las dos rectas. La calculamos:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 600, \\ 2x + y = 480, \end{cases} \Rightarrow 2y = 120 \Rightarrow y = 60, \quad x = 210.$$

Evaluamos el beneficio en los vértices:

(x, y)	$(0, 0)$	$(240, 0)$	$(210, 60)$	$(0, 200)$
$B = 15x + 10y$	0	3600	3750	2000

Se deben fabricar 210 lámparas A y 60 lámparas B; el beneficio máximo es 3750 €.

Problema 3 · Precio que maximiza el beneficio

El precio por unidad es x euros y se venden $y = 50 - x$ unidades, con $0 \leq x \leq 50$. El beneficio total es el beneficio por unidad multiplicado por el número vendido:

$$B(x) = (x - 10)(50 - x) = -x^2 + 60x - 500.$$

La función es polinómica, por lo que está definida para todo real; el contexto restringe el dominio a $[0, 50]$. Para hallar sus posibles extremos derivamos y resolvemos $B'(x) = 0$:

$$B'(x) = -2x + 60 = 0 \Rightarrow x = 30.$$

Para justificar el signo, probamos $x = 10$ y $x = 40$: $B'(10) = 40 > 0$ y $B'(40) = -20 < 0$. El beneficio crece hasta $x = 30$ y luego decrece, así que allí se alcanza el máximo. A ese precio se venden $50 - 30 = 20$ unidades y el beneficio es

$$B(30) = (30 - 10)(50 - 30) = 20 \cdot 20 = 400 \text{ €}.$$

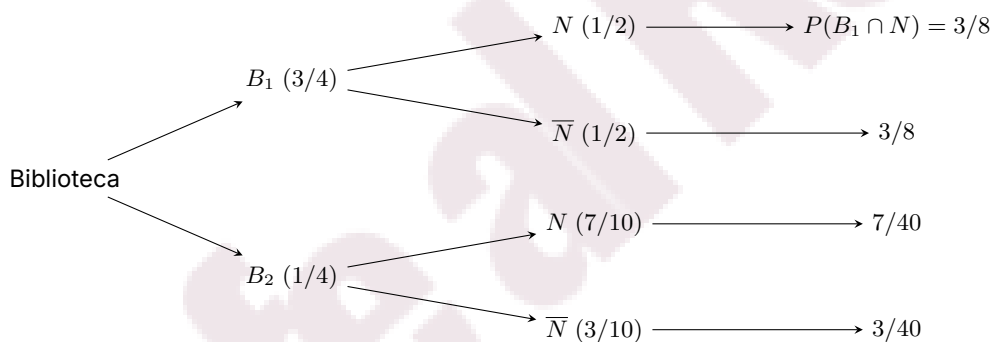
Precio: 30 €; ventas: 20 unidades; beneficio máximo: 400 €.

Problema 4 · Elección de biblioteca y de libro

Sean B_1 y B_2 los sucesos «elegir la primera» y «elegir la segunda biblioteca», y N el suceso «elegir una novela». Si la probabilidad de ir a la primera es triple de la de ir a la segunda, sus probabilidades suman 1 y quedan

$$P(B_2) = \frac{1}{4}, \quad P(B_1) = \frac{3}{4}.$$

En el árbol, la probabilidad de una rama final se obtiene multiplicando las probabilidades de sus ramas; para $P(N)$ sumamos los dos caminos incompatibles que acaban en novela:



$$P(N) = P(B_1)P(N | B_1) + P(B_2)P(N | B_2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{10} = \frac{11}{20} = 0,55.$$

Para calcular la probabilidad inversa usamos Bayes: se divide la probabilidad de elegir la primera biblioteca y una novela entre la probabilidad total de novela.

$$P(B_1 | N) = \frac{P(B_1)P(N | B_1)}{P(N)} = \frac{(3/4)(1/2)}{11/20} = \frac{15}{22}.$$

$$P(N) = \frac{11}{20} = 0,55, \quad P(B_1 | N) = \frac{15}{22} \approx 0,6818.$$

Ejercicio B

Problema 1 · Puntualidad y medio de transporte

Sean T el suceso «acudir en transporte», A el suceso «acudir andando» y P el suceso «llegar puntual». Los datos son $P(T) = 0,75$, $P(A) = 0,25$, $P(P | T) = 0,60$ y $P(P | A) = 0,90$. La probabilidad de llegar puntual es la suma de los dos caminos posibles:

$$P(P) = P(T)P(P | T) + P(A)P(P | A) = 0,75 \cdot 0,60 + 0,25 \cdot 0,90 = 0,675.$$

Invertimos la condición mediante la fórmula de Bayes para hallar, entre quienes llegan puntuales, la proporción que fue andando:

$$P(A | P) = \frac{P(A)P(P | A)}{P(P)} = \frac{0,25 \cdot 0,90}{0,675} = \frac{1}{3}.$$

La probabilidad de no llegar puntual es el complementario de $P(P)$:

$$P(\overline{P}) = 1 - 0,675 = 0,325 = \frac{13}{40}.$$

$$P(A | P) = \frac{1}{3}, \quad P(\text{no llegar puntual}) = \frac{13}{40} = 0,325.$$

Problema 2 · Coste mínimo de vitaminas

Sean x e y las pastillas de marca X e Y. Las dosis mínimas y el límite de ocho pastillas se traducen en

$$x + y \geq 6, \quad 3x + 2y \geq 18, \quad x + y \leq 8, \quad x, y \geq 0.$$

El coste en euros es $C = 0,5x + 0,3y$, que queremos minimizar. Los vértices factibles son $(6, 0)$, $(8, 0)$ y la intersección de $x + y = 8$ con $3x + 2y = 18$. En ella, $y = 8 - x$ y

$$3x + 2(8 - x) = 18 \Rightarrow x = 2, \quad y = 6.$$

Comparamos el coste en los tres vértices:

(x, y)	$(6, 0)$	$(8, 0)$	$(2, 6)$
$C = 0,5x + 0,3y$	3	4	2,8

El mínimo corresponde a una solución entera y satisface exactamente la dosis de vitamina B y el máximo de ocho pastillas.

2 pastillas X y 6 pastillas Y; coste mínimo 2,80 €.

Problema 3 · Precio de las bebidas

Sean c , t y l los precios, en euros, de un café, un cortado y un café con leche. Las tres cuentas del enunciado producen el sistema

$$\begin{cases} 2c + 2t + l = 3, \\ c + t + 3l = 3,25, \\ c + 2t + l = 2,45. \end{cases}$$

Restamos la tercera ecuación de la primera: $c = 3 - 2,45 = 0,55$. Al sustituirlo en la primera y en la segunda quedan

$$2t + l = 1,90, \quad t + 3l = 2,70.$$

De la primera, $l = 1,90 - 2t$. Sustituimos en la segunda:

$$t + 3(1,90 - 2t) = 2,70 \Rightarrow -5t = -3 \Rightarrow t = 0,60, \quad l = 1,90 - 1,20 = 0,70.$$

Café: 0,55 €; cortado: 0,60 €; café con leche: 0,70 €.
--

Problema 4 · Descomposición que minimiza una suma

Sean x e y los sumandos, de modo que $x + y = 90$. Queremos minimizar $S = x^2 + 2y^2$. Sustituimos $y = 90 - x$ para expresar la magnitud con una sola variable:

$$S(x) = x^2 + 2(90 - x)^2 = 3x^2 - 360x + 16200, \quad 0 \leq x \leq 90.$$

Derivamos y buscamos los puntos críticos:

$$S'(x) = 6x - 360 = 0 \Rightarrow x = 60, \quad y = 90 - 60 = 30.$$

Como $S''(x) = 6 > 0$, la función es convexa y el punto crítico es un mínimo. El valor mínimo es

$$S(60) = 60^2 + 2 \cdot 30^2 = 3600 + 1800 = 5400.$$

$90 = 60 + 30, \quad S_{\min} = 5400.$
--