

BAREMO DEL EXAMEN: Cada problema se puntuará hasta 2,5 puntos.

La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema.

Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculos simbólicos ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

A partir de la tercera falta de ortografía se deducirán -0,10 puntos hasta un máximo de un punto.

Por errores en la redacción, en la presentación, falta de coherencia, falta de cohesión, incorrección léxica e incorrección gramatical se podrá deducir un máximo de medio punto.

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)

En un país se ha detectado una enfermedad X transmitida por el virus VirusX. Se sabe que la enfermedad la padece el 20% de la población. Para detectarla, se usa un test de antígenos que, entre personas enfermas da positivo en el 90% de los casos y entre personas sanas da positivo en el 5% de los casos. Se pide:

Responda a todos los apartados

- 1.1 **(0.75 puntos)** Calcular la probabilidad de que, al realizar el test a una persona del país al azar, dicho test dé positivo.
- 1.2 **(0.75 puntos)** Calcular la probabilidad de que una persona esté sana sabiendo que ha dado positivo en el test.
- 1.3 **(1 punto)** Si tomamos 8 personas de la población al azar, ¿cuál es la probabilidad de que como máximo dos de ellas tengan la enfermedad?

PREGUNTA 2: ÁLGEBRA (2,5 puntos)

Responda al apartado 2.1 o al apartado 2.2

2.1 El estado tensional en un punto de un sólido elástico se define a partir de una matriz

cuadrada T de orden 3. El vector tensión en la dirección de $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ viene dado por

$U = T \mathbf{v}$. Para

$$T = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 \\ m & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

se pide:

- 2.1.1 (1 punto) Discutir el sistema de ecuaciones lineales $Tv = u$ en función del parámetro real m .
- 2.1.2 (0.75 puntos) Resolver el sistema $Tv = u$ para $m = -1$.
- 2.1.3 (0.75 puntos) Se llaman tensiones principales de T a los valores reales α tales que $\det(T - \alpha I) = 0$, siendo I la matriz identidad. Calcular las tensiones principales para $m = 2$.

2.2 Decimos que una matriz cuadrada es ortogonal cuando su matriz inversa coincide con su matriz transpuesta.

Se pide:

- 2.2.1 (0.75 puntos) Comprobar que para todo valor real α la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

es ortogonal.

- 2.2.2 (0.75 puntos) Determinar los valores de a y b para que la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sea ortogonal. ¿Cuántas matrices ortogonales de esta forma existen?

- 2.2.3 (1 punto) Resuelve la ecuación matricial con incógnita X

$$BX + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde B es una matriz ortogonal como la del apartado anterior.

PREGUNTA 3: GEOMETRÍA (2,5 puntos)

Responda al apartado 3.1 o al apartado 3.2

3.1 Dada la recta $r: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{1}$ y el plano $\pi: 2x + my + z - 3 = 0$, se pide:

- 3.1.1 (0.5 puntos) El valor de m para el que π y r son perpendiculares.

- 3.1.2 (0.75 puntos) El valor de m para el que π y r son paralelos.

3.1.3 (1.25 puntos) Calcular, cuando sea posible, el punto de intersección entre π y r en función del parámetro real m .

3.2 Consideramos la recta s del espacio con ecuación:
$$\frac{x-1}{0} = y-1 = \frac{z-1}{-1}.$$

Se pide:

3.2.1 (0.5 puntos) Encontrar una ecuación del plano que pasa por el punto $(1,1,1)$ y es perpendicular a s .

3.2.2 (1 punto) Encontrar los puntos de la recta s que están a distancia 4 del origen.

3.2.3 (1 punto) Calcular el ángulo que forma la recta s con el eje Z .

PREGUNTA 4: ANÁLISIS (2,5 puntos)

Responda al apartado 4.1 o al apartado 4.2

4.1 Consideremos la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+1},$$

se pide:

4.1.1 (0.5 puntos) Hallar el dominio y estudiar la continuidad de la función f .

4.1.2 (0.5 puntos) Hallar las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f .

4.1.3 (1 punto) Calcular, si existen, los valores máximos y mínimos relativos y absolutos de la función f .

4.1.3 (0.5 puntos) Representar la función f .

4.2 Un decorador desea pintar una pared rectangular de 12 metros de largo por 3 de alto. Para ello supone que la esquina inferior izquierda de la pared corresponde al origen de coordenadas de un plano y pinta en la pared la curva de ecuación

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2.$$

A continuación, el decorador colorea en rojo la parte de la pared que queda por encima de la curva y en verde la que queda por debajo. Se pide:

4.2.1 (1.25 puntos) Dibujar la parte de la curva anterior que corresponde a la pared, detallando los cortes con los ejes, los extremos absolutos, y la monotonía de la función en el intervalo $[0,12]$.

- 4.2.2 (1 punto) Calcular el área de la pared que tiene color verde y la que tiene color rojo.
- 4.2.3 (0.25 puntos) La parte verde se pinta usando botes de pintura capaces de cubrir 3 metros cuadrados cada uno. ¿Cuál es el mínimo número de botes que vamos a necesitar para pintar la parte verde?

Tu Profe al Rescate